

## CAPITULO 5

# SISTEMAS CONTINUOS

Por ENRIQUE ALARCON y MIGUEL ANGEL HACAR

En el capítulo 3 se han tratado problemas dinámicos de sistemas con un solo grado de libertad y en el capítulo 4 los correspondientes a un número cualquiera de grados. La estructura discreta y continua (previamente discretizada) se llegaba a definir como sistema dinámico por sus matrices de masa, de rigidez y de amortiguamiento.

Por diversos métodos se obtenía la respuesta del sistema a cualquier sollicitación de cargas variables de modo determinado (periódico o no) o probabilístico en el tiempo, con lo que quedaba resuelto el problema dinámico.

Ahora vamos a referirnos a estructuras continuas.

En realidad puede abordarse su estudio como caso límite al discretizar la estructura en un número muy elevado de elementos de tamaños cada vez más reducidos.

Dentro de las estructuras que llamamos artificiales en nuestro capítulo primero podríamos considerarlas definidas geométricamente en una dimensión (lineales), dos dimensiones (superficiales) o tres (especiales). Claro que aún así definida una estructura, por ejemplo una cuerda o una viga puede tener movimientos en un plano o sea con componentes en otra dimensión que la que sirvió para definirla, e incluso con movimientos especiales como sería una viga sometida a movimientos de flexión y torsión.

Del mismo modo en una estructura superficial o definida en dos dimensiones pueden considerarse los movimientos en su plano o en su superficie o fuera de él (normal o no a su superficie media).

Como estructuras artificiales son de interés las siguientes: cuerdas, barras, vigas (rectas, curvas, continuas, flotantes, etc.), sistemas reticulares, ( de barras rectas, curvas, de sección variable, etc.), membranas, cáscaras,

placas (rectas o curvas), etc. sometidas a esfuerzos originados por sus pesos propios y por las acciones de fuerzas y deformaciones exteriores, variables en el tiempo del modo más diverso.

Las estructuras naturales tienen sus características especiales, sus respuestas a determinadas sollicitaciones.

Hay que estudiarlas para llegar a conocer:

a) Su comportamiento antes y después de ser alteradas o modificadas por el hombre, y

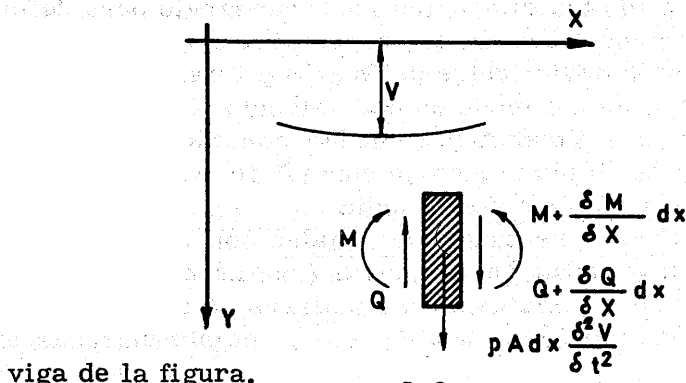
b) Sus interacciones con las estructuras artificiales que sirven para cumplimentarlas o reforzarlas.

#### VIGAS. VIBRACIONES DE FLEXION

Vamos a estudiar las vibraciones de la pieza recta con las restricciones clásicas de la Resistencia de Materiales (elasticidad, homogeneidad, isotropía, etc.) ciéndonos al caso de que:

1. No exista amortiguamiento.
2. Las vibraciones se desarrollan en un plano principal de la viga.
3. La relación canto/longitud es suficientemente pequeña para despreciar los giros de la sección, es decir, el efecto de la llamada "inercia de rotación".
4. Se desprecian las deformaciones producidas por el esfuerzo cortante.
5. Las tensiones originadas por la vibración se mantienen por debajo del límite elástico.
6. Las deflexiones se miden a partir de la elástica del peso propio.

Consideremos ahora el equilibrio en la rebanada de la



$y = f(x, t)$  es la flecha

$q$  = la sobrecarga por m. l

$\rho$  = la densidad de la pieza

$A$  = la sección recta

$I$  = el momento de inercia

Estableciendo el equilibrio de flectores, cortantes y relacionando las curvaturas con los momentos se obtiene

$$\rho A \ddot{y} = (-EI y'')''$$

(Los puntos indican derivadas respecto al tiempo y las comas derivadas respecto a la abscisa).

El establecimiento de esta ecuación se puede hacer también de modo directo, pues si hemos admitido las hipótesis de la Resistencia de Materiales, para una viga de sección constante se cumplirá

$$q = EI y^{IV}$$

Si la viga está vibrando, la carga que soporta es la fuerza de inercia alterna, o sea

$$q = -\rho A \ddot{y}$$

y

$$\frac{\rho A}{EI} \ddot{y} + y^{IV} = 0$$

que es la misma anterior.

Se pueden buscar soluciones

$$y = Y(x) \cdot \text{sen}(pt + a)$$

donde

$$Y(x) = C_1 \text{sen } \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \text{sh } \lambda x + C_4 \text{ch } \lambda x$$

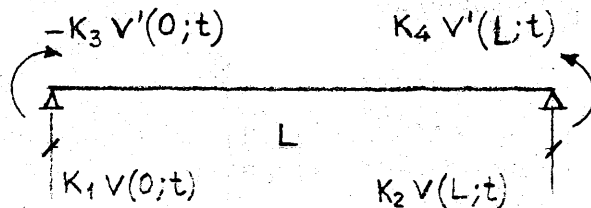
en la que

$$\lambda^4 = p^2 \frac{\rho A}{EI}$$

La determinación de  $y$  depende pues de 6 constantes, 4 de las cuales  $C_1, C_2, C_3, C_4$  se determinan de acuerdo con las condiciones de borde y las dos restantes  $p$  y  $a$  a través de dos condiciones de tiempo.

Si establecemos las 4 condiciones de borde, para que el sistema sea homogéneo el determinante de los coeficientes debe anularse, lo que nos ofrece la ecuación de las frecuencias que es lo que más nos interesa.


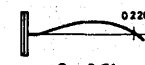
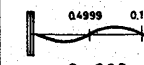
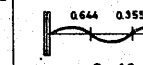
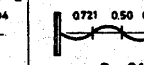
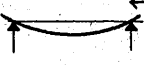
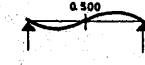
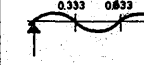
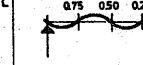

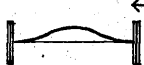
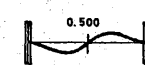
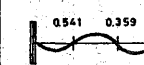
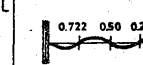
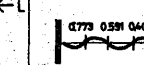
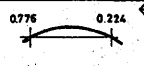
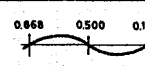
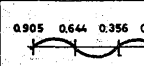
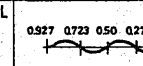
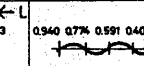
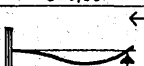
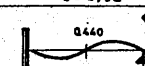
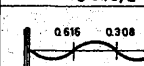
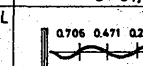
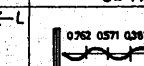
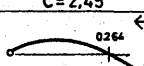
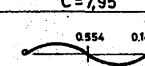
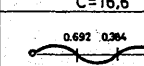
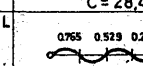
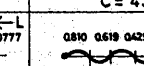
En el caso general de la viga indicada en la figura,



apoyada sobre soportes elásticos de constantes  $k_1$  y  $k_2$  para las reacciones y  $k_3$  y  $k_4$  para los giros el determinante que nos da las frecuencias es el siguiente. (Ver ref. 1)

$$A = \begin{vmatrix} -\lambda^3 & \frac{k_1}{EI} & \lambda^3 & \frac{k_1}{EI} \\ -\frac{k_3}{EI} & -\lambda & -k_3 EI & \lambda \\ -\lambda^3 \cos \lambda L - \frac{k_2}{EI} \sin \lambda L & \lambda^3 \sin \lambda L - \frac{k_2}{EI} \cos \lambda L & \lambda^3 \operatorname{ch} \lambda L - \frac{k_2}{EI} \operatorname{sh} \lambda L & \lambda^3 \operatorname{ch} \lambda L - \frac{k_2}{EI} \operatorname{ch} \lambda L \\ -\lambda \sin \lambda L + \frac{k_4}{EI} \cos \lambda L & -\lambda \cos \lambda L - \frac{k_4}{EI} \sin \lambda L & \lambda \operatorname{sh} \lambda L + \frac{k_4}{EI} \operatorname{ch} \lambda L & \lambda \operatorname{ch} \lambda L + \frac{k_4}{EI} \operatorname{sh} \lambda L \end{vmatrix}$$

# CUADRO DE FREBERG Y KEMLER

VOLADIZO	 C = 0,58	 C = 3,51	 C = 9,82	 C = 19,2	 C = 31,8
SIMPLEMENTE SOPORTADA	 C = 1,57	 C = 8,28	 C = 14,1	 C = 25,2	 C = 39,4
EXTREMOS EMPOTRADOS	 C = 3,56	 C = 9,82	 C = 19,2	 C = 31,8	 C = 47,5
EXTREMOS LIBRES	 C = 3,56	 C = 9,82	 C = 19,2	 C = 31,8	 C = 47,5
UN EXTREMO EMPOTRADO OTRO ARTICULADO	 C = 2,45	 C = 7,95	 C = 16,6	 C = 28,4	 C = 43,3
UN EXTREMO ARTICULADO OTRO LIBRE	 C = 2,45	 C = 7,95	 C = 16,6	 C = 28,4	 C = 43,3

$$f_n = C \sqrt{\frac{EI}{m L^4}}$$

$f_n$  = FRECUENCIA NATURAL ( $\frac{1}{\text{seg}}$ )

E = MODULO DE ELASTICIDAD ( $\text{kg/cm}^2$ )

I = MOMENTO DE INERCIA ( $\text{cm}^4$ )

m = MASA DE LA VIGA ( $\text{kg/cm} \cdot \text{cm} \cdot \text{seg}^2$ )

L = LONGITUD (cm)

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{cm}^4}{\text{kg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{seg}^2 \cdot \text{cm}^4} = \frac{1}{\text{seg}^2}$$

Imponiendo las condiciones de borde para cada caso, e igualando a cero el determinante anterior, al resolver la ecuación resultante obtendríamos las frecuencias y, ya fácilmente, los modos.

A continuación se incluye la tabla de Freberg y Kemler (ver ref. 8) que nos permite obtener de un modo inmediato los resultados para los casos más corrientes de ligaduras en los bordes.

Insistiremos nuevamente en que se han despreciado las deformaciones debidas al esfuerzo cortante y los términos de la inercia rotatoria. La ecuación del movimiento que se obtiene al incluir esos efectos se conoce con el nombre de "Ecuación de Timoshenko" y presenta la forma

$$EI y^{IV} = f_1(x) - \frac{EI}{K'GA} f_1'(x) - f_2'(x)$$

en la que  $f_1(x)$  es la carga por unidad de longitud que soporta la viga y  $f_2(x)$  una carga de momentos por unidad de longitud. El primer término del segundo miembro corresponde a la teoría normal de la flexión pura, el segundo constituye el efecto del cortante y el tercero el de la carga de momentos.

Jacobsen y Ayre (ver 11) han realizado un detenido estudio de esta ecuación. A nosotros nos basta saber que en los casos normales de disminución experimentada por la frecuencia al tener en cuenta estos efectos es despreciable. Por ejemplo, para una viga con ambos extremos apoyados (ref. 12) el error es menor del 1% cuando  $L/kn > 45$  y menor del 5% cuando  $L/kn > 20$  donde  $n$  es el número del armónico que se estudie y  $K = (I/A)^{1/2}$  es el radio de giro.

Volvamos de nuevo sobre

$$\frac{\rho A}{EI} \ddot{y} + y^{IV} = 0$$

cuya solución es  $y = Y(x) \cdot \text{sen}(pt + a)$ .

Al sustituir queda

$$Y^{IV} - \lambda^4 Y = 0 \qquad \lambda^4 = p^2 \frac{\rho A}{EI}$$

Las  $y$  se llaman funciones de forma y representan el estado de la viga para cada modo de oscilación. Una vez resuelto el determinante de las  $\lambda$  tendremos unos valores

$$\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \dots; \lambda_n; \dots$$

y sus correspondientes

$$p_1; p_2; p_3; \dots; p_n; \dots$$

A cada uno de ellos le corresponderá una función  $Y$ , obtenida al resolver la ecuación anterior. Se puede demostrar:

- 1º Que las funciones  $Y_n$  son ortogonales respecto a la función  $-m = \rho A$  - que da la masa de la viga por unidad de longitud.

Para dos modos diferentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_a^b m Y_n Y_k dx = 0 \\ \int_a^b m Y_n^2 dx = \Gamma \end{array} \right. \quad \text{y para dos iguales}$$

Cuando  $\Gamma=1$  las funciones de forma se llaman normalizadas o "funciones normales". (Compruébese la completa analogía con lo dicho para sistemas con  $n$  grados de libertad). Las representaremos por  $\bar{Y}_n$ .

- 2º En general se demuestra que

$$\Gamma = \int_a^b \bar{m} Y_n^2 dx = \left[ \frac{x}{4 \lambda_n^4} (\lambda_n^4 \bar{m} Y_n^2 - 2 \bar{I} Y_n' Y_n''' + \bar{I} Y_n''''^2) \right]$$

donde los valores se han puesto en la forma

$$\left. \begin{array}{l} EI = EI_o \bar{I} \\ m = m_o \bar{m} \\ \lambda_n^4 = \frac{p_n^2 m_o}{EI_o} \end{array} \right\}$$

- 3º En virtud de la ortogonalidad las funciones de forma se pueden utilizar para desarrollar en serie las cargas que actúan sobre la viga.

$$\text{Si } f(x) = \sum A_n \bar{Y}_n$$

$$A_n = \int_a^b m f(x) \bar{Y}_n dx$$

## LOS METODOS APROXIMADOS PARA LA DETERMINACION DE FRECUENCIAS NATURALES

Hemos presentado anteriormente el caso de la viga de sección uniforme; para los casos de sección variable se pueden plantear también las ecuaciones diferenciales que las representen, pero en general se desconocerá su solución sencilla. Conviene entonces la utilización de los métodos aproximados que, substancialmente se reducen a los dos ya indicados en el apartado 4, a saber: el método de Rayleigh y el de la iteración matricial o método de Vianello-Stodola.

Para una viga con desplazamientos obtenidos de

$$y(x, t) = Y(x) \text{ sen } (pt + a)$$

la energía potencial es

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \text{sen}^2 (pt + a) \int_0^l EI \left( \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx$$

Si la viga tiene una masa  $\rho A(x)$  p. m. l. y cargas concentradas  $m_i$  a distancias  $x_i$  del origen, la energía cinética es

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^l \rho A(x) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \sum_1^n m_i \left[ \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_{x=x_i} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot w^2 \cos^2 (pt + a) \left[ \int_0^l \rho A(x) \dot{Y}^2 dx + \sum_1^n m_i \{ \dot{y}(x_i) \}^2 \right] \end{aligned}$$



y abreviadamente

$$\left\{ \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot p^2 \cos^2(pt + \alpha) J_t \\ U &= \frac{1}{2} \cdot \text{sen}^2(pt + \alpha) J_u \end{aligned} \right.$$

Del principio de conservación de la energía

$$\frac{1}{2} \cdot p^2 \cos^2(pt + \alpha) J_t + \frac{1}{2} \text{sen}^2(pt + \alpha) J_u = C$$

Cuando

$$pt + \alpha = 0, \pi, 2\pi, \dots \quad C = \frac{1}{2} p^2 J_t$$

$$pt + \alpha = \pi/2, 3\pi/2, \dots \quad C = \frac{1}{2} J_u$$

y por lo tanto

$$p^2 = \frac{J_u}{J_t} = \frac{\int_0^l EI \left( \frac{d^2 Y}{dx^2} \right)^2 dx}{\left[ \int_0^l p A Y^2 dx + \sum_1^n m_i Y_i^2 \right]}$$

Conocido  $Y(x)$  obtendríamos el valor exacto de  $p$ .

El método de Rayleigh consistirá en suponer un razonable  $Y(x)$  y obtener el correspondiente valor de  $p$ .

Como habíamos indicado la aproximación de  $p$  es excelente aunque la de  $Y(x)$  sea muy grosera, y siempre se obtienen valores por encima del real. Por lo tanto repitiendo el procedimiento una serie de veces y escogiendo el menor valor, obtendremos un resultado apreciable.

Para hacer esto de una vez, se puede suponer

$$Y(x) = \sum_1^n B_s Y_s(x)$$

donde  $B_s$  son parámetros arbitrarios que se determinan con la condición de llevar  $p'$  a un mínimo. Se forman

$$\frac{\partial p^2}{\partial B_s} = 0 \quad (s = 1, 2, 3, \dots, n)$$

La eliminación de los  $B_s$  lleva a un determinante en  $p^2$  cuyas raíces dan valores aproximados de las  $n$  frecuencias primeras del sistema. Es el método de Ritz.

Veamos ahora el método de Stodola-Vianello. Según habíamos dicho, la ecuación de los modos se puede escribir

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI Y'') = p^2 m Y$$

Tomemos una primera aproximación de  $Y$ ,  $Y_1$

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI Y'') = p^2 m Y_1$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos una solución

$$Y = p^2 \cdot f_1(x)$$

Si  $Y_1$  hubiera sido el valor real  $Y_1 = Y = p^2 \cdot f_1(x)$

$$p^2 = \frac{Y_1}{f_1(x)}$$

Si esto no ocurre supondremos una nueva aproximación  $Y_2 = K f_1(x)$  que al ser sustituida dará un nuevo valor

$Y = p^2 \cdot f_2(x)$  que debería ser precisamente  $Y_2$ .

Continuando el proceso se ve que los valores de  $p$  con-

vergen hacia el valor correcto de la frecuencia y los de  $Y_i$  hacia la expresión real de modo de vibración.

Entre los métodos aproximados debemos citar también el de Dunkerley-Southwell que produce resultados análogos al de Rayleigh con mucho menos trabajo. El desarrollo puede verse en (15) o bien en (11).

Supongamos una viga simplemente apoyada sometida a una serie de cargas  $P_2$ . Dunkerley propuso en 1893 que la frecuencia fundamental del sistema cumple, aproximadamente la relación

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p_0^2} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_i^2} + \dots$$

Donde  $p_0$  es la frecuencia de la viga sometida a su peso propio.

$p_i$  es la frecuencia de la viga inmaterial sometida a la carga  $P_i$ .

Como

$$p_i = \sqrt{\frac{g}{\gamma_{sti}}}$$

en los casos en que se puede despreciar el peso propio

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n \gamma_{sti}$$

Siendo cada  $\gamma_{sti}$  evaluada cuando solamente actúa la fuerza  $P_i$ .

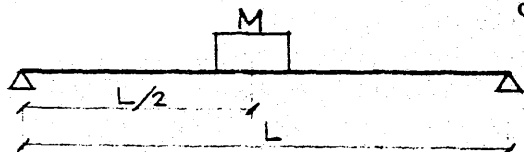
El método, por lo tanto, es aplicable a cualquier tipo de estructura.

#### MATRICES DE TRANSFERENCIA

Cabe preguntarse hasta que punto sería exacta la hipótesis de sustituir el sistema real por otro, más sencillo, en el que las masas se concentrasen en puntos

determinados.

En el caso de la viga simplemente apoyada es muy sencillo ver que, si existe una masa  $M$  concentrada en el centro,



$$p^2 = \frac{48 EI}{M L^3}$$

Del cuadro de Freeberg

$$n = 1,57 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}}$$

es decir

$$2\pi \times 1,57 \sqrt{\frac{EI}{m L^4}} = \sqrt{48} \sqrt{\frac{EI}{M L^3}}$$

lo que exige

$$M = \frac{m L}{2}$$

En el caso de una viga simplemente basta concentrar la mitad de la masa en el centro para obtener la frecuencia real.

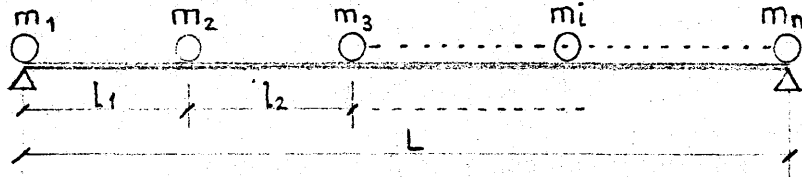
Cuando una viga presenta características complicadas, se pueden concentrar las masas en puntos determinados; de este modo sustituiremos el sistema real de infinitos grados de libertad por otro con un número limitado " $n$ ".

La exactitud será mayor con  $n$ .

Naturalmente existen muchas posibilidades de agrupación. (Algunas indicaciones sobre la exactitud alcanza-

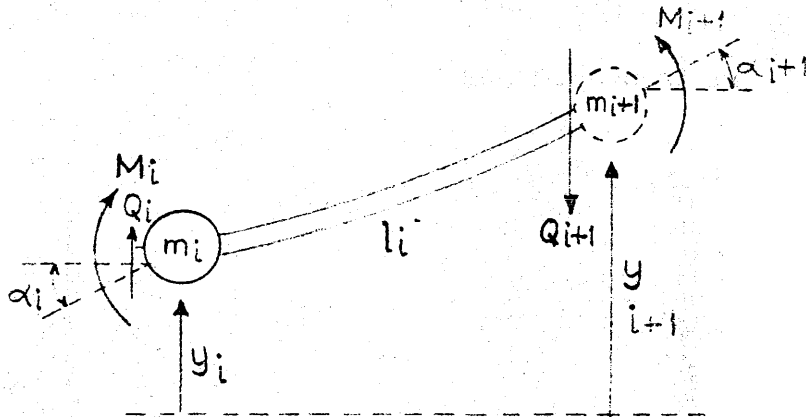
ble se dan en 13) aunque no entraremos en su discusión.

Partiremos pues de una viga con masas concentradas



tal como se indica.

Entre cada dos masas la viga se supone uniforme.



Aislemos la masa  $m_i$  con el trozo  $l_i$ .

Es claro que se cumple

$$\begin{cases} Q = M' \\ M = EI \alpha' \\ a = y' \end{cases}$$

Puesto que la única fuerza externa es la de la inercia y la solución era  $y = Y \cdot \text{sen}(pt + \alpha)$ , las ecuaciones de equilibrio son

$$\begin{cases} Q_{i+1} = Q_i + p^2 m_i y_i \\ M_{i+1} = M_i + Q_i l_i + p^2 m_i y_i l_i \end{cases}$$

Por integraciones sucesivas obtenemos

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = l_i \frac{M_i}{EI_i} + \frac{l_i^2}{2EI_i} Q_i + \frac{p^2 m_i l_i^2}{2EI_i} y_i + \alpha_i \\ y_{i+1} = \frac{l_i^2}{2EI_i} M_i + \frac{l_i^3}{6EI_i} Q_i + l_i \alpha_i + \left( 1 + \frac{p^2 m_i l_i^3}{6EI_i} \right) y_i \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ Q \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{p^2 m_i l_i^3}{6EI_i} & l_i \frac{l_i^2}{2EI_i} & \frac{l_i^3}{6EI_i} \\ \frac{p^2 m_i l_i^2}{2EI_i} & 1 & \frac{l_i^2}{2EI_i} \\ p^2 m_i l_i & 0 & 1 \\ p^2 m_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \alpha \\ M \\ Q \end{pmatrix}_i$$

o bien

$$\{Z\}_{i+1} = \|U\|_i \{Z\}_i$$

Los vectores  $\{Z\}$  se llaman "vectores de etapa" pues dan la información de cada punto, mientras que  $\|U\|_i$  es la matriz de transferencia en la etapa  $i$ .

Está claro que las etapas  $1$  y  $n$  se relacionan a través de

$$\{Z\}_n = \|U\|_{n-1} \cdot \|U\|_{n-2} \cdots \|U\|_2 \|U\|_1 \{Z\}_1$$

$$\{Z\}_n = \|P\| \{Z\}_1$$

La matriz  $\|P\|$  es la matriz de transferencia total que relaciona dos etapas con características conocidas.

Para la viga biapoyada, por ejemplo, tendríamos

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}_n = \|P_{ij}\| \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \\ Q \end{pmatrix}_1$$

Desarrollando las filas nulas

$$\left. \begin{aligned} 0 &= p_{12} \alpha_1 + p_{14} Q_1 \\ 0 &= p_{32} \alpha_1 + p_{34} Q_1 \end{aligned} \right\}$$

que obliga a

$$\begin{vmatrix} p_{12} & p_{14} \\ p_{32} & p_{34} \end{vmatrix} = 0$$

es decir la ecuación de frecuencias.

Para la viga empotrada y libre

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \phi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_n = \|p_{ij}\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ Q \end{pmatrix}_1 \rightarrow \begin{vmatrix} p_{33} & p_{34} \\ p_{43} & p_{44} \end{vmatrix} = 0$$

y así para cualquier caso.

Una vez obtenidas las frecuencias el estado de cada modo  $r$  se obtiene a partir de

$$\{Z\}_i^r = \|v\|_{i-1}^r \|v\|_{i-2}^r \dots \|v\|_i^r \{Z\}_i^r$$

Si en lugar de una viga a flexión tenemos un eje a torsión, el equilibrio se obtiene de

$$\theta_{i+1} = \left(1 - \frac{p^2 I_i}{k_i}\right) \theta_i + \frac{1}{k_i} M_{Ti}$$

$$M_{Ti+1} = -p^2 I_i \theta_i + M_{Ti}$$

$$\begin{pmatrix} \theta \\ M_T \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{p^2 I_i}{k_i} & \frac{1}{k_i} \\ -p^2 I_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ M_T \end{pmatrix}_i$$

donde  $I_i$  es el momento de inercia de la masa  $i$ ,  $\theta_i$  el desplazamiento angular y  $M_{Ti}$  el momento torsor.

Si el eje está empotrado y apoyado

$$\begin{pmatrix} 0 \\ M_T \end{pmatrix}_n \cong \|p_{ij}\| \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \end{pmatrix}_1$$

y como  $0 = p_{11} \theta_1$  la ecuación de las frecuencias es  $p_{11} = 0$

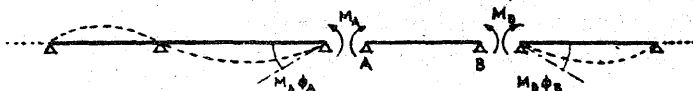
Para más detalles puede consultarse (16).



## LA VIGA CONTINUA

El estudio de la viga continua se puede hacer directamente cuando el número de vanos es pequeño, pero en cuanto es superior a 3, la resolución directa (ver.vg.: ref. 8) se presenta inatacable. Por ello vamos a prescindir de esos casos que se pueden estudiar en cualquiera de las obras que se ofrecen en la Bibliografía presentada y trataremos el caso general.

Aislemos un vano  $AB$  de la viga en cuestión.



Los giros en los extremos  $A$  y  $B$ , debidos a la vibración se pueden poner en la forma  $M_A \phi_A$  y  $M_B \phi_B$ , donde  $\phi_A$  y  $\phi_B$  son los giros debidos a un momento unidad aplicado respectivamente a uno y otro del vano en cuestión.

Para la viga  $AB$  podemos escribir las siguientes condiciones de borde

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(0) = Y(L) = 0 \dots\dots\dots 2 \text{ ecuaciones} \\ Y'(0) = M_A \phi_A = EI Y''(0) \phi_A \dots\dots\dots 1 \text{ ecuación} \\ Y'(L) = M_B \phi_B = -EI Y''(L) \phi_B \dots\dots\dots 1 \text{ ecuación} \end{array} \right.$$

Si aplicamos estas condiciones a la función solución general de la viga

$$Y = C_1 \operatorname{sen} \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x$$

y eliminamos las constantes, para que el sistema sea homogéneo resulta la ecuación

$$\frac{K_A + K_B}{4} \lambda L (\cos \lambda L \operatorname{sh} \lambda L - \operatorname{sen} \lambda L \operatorname{ch} \lambda L) - \frac{K_A \cdot K_B}{8} (\lambda L)^2 (\operatorname{sen} \lambda L \cdot \operatorname{sh} \lambda L + \cos \lambda L \cdot \operatorname{ch} \lambda L) - 1 = 0$$

donde hemos hecho  $K_A = \frac{4EI\phi_A}{L}$  y  $K_B = \frac{4EI\phi_B}{L}$

es decir, resulta una función

$$F(\lambda L, K'_A, K'_B) = 0$$

que se puede representar gráficamente para los valores más interesantes de sus factores. Es la curva que se adjunta a continuación.

Quiere esto decir que si conociéramos  $\phi_A$  y  $\phi_B$  de esa curva sacaríamos  $\lambda L$ . El procedimiento será obrar por tanteos mediante el esquema siguiente:

- 1) Suponemos un valor de  $\lambda L = (\lambda L)_1$
- 2) Buscamos los valores de  $\phi$
- 3) Formamos las  $K'$
- 4) Buscamos el correspondiente valor  $(\lambda L)_2$  en las tablas.

Si este valor no coincide con el supuesto en un principio repetiremos el proceso sucesivamente hasta conseguir dos valores

$$(\lambda L)_i \approx (\lambda L)_{i+1}$$

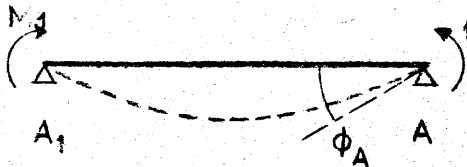
en el esquema expuesto anteriormente son sencillos los pasos 1, 3 y 4, pero necesitamos evaluar los  $\phi$  y a ello nos vamos a aplicar.

El problema abarca otros dos; en efecto, el ángulo  $\phi_A$  se podrá determinar aislando la viga vecina a la



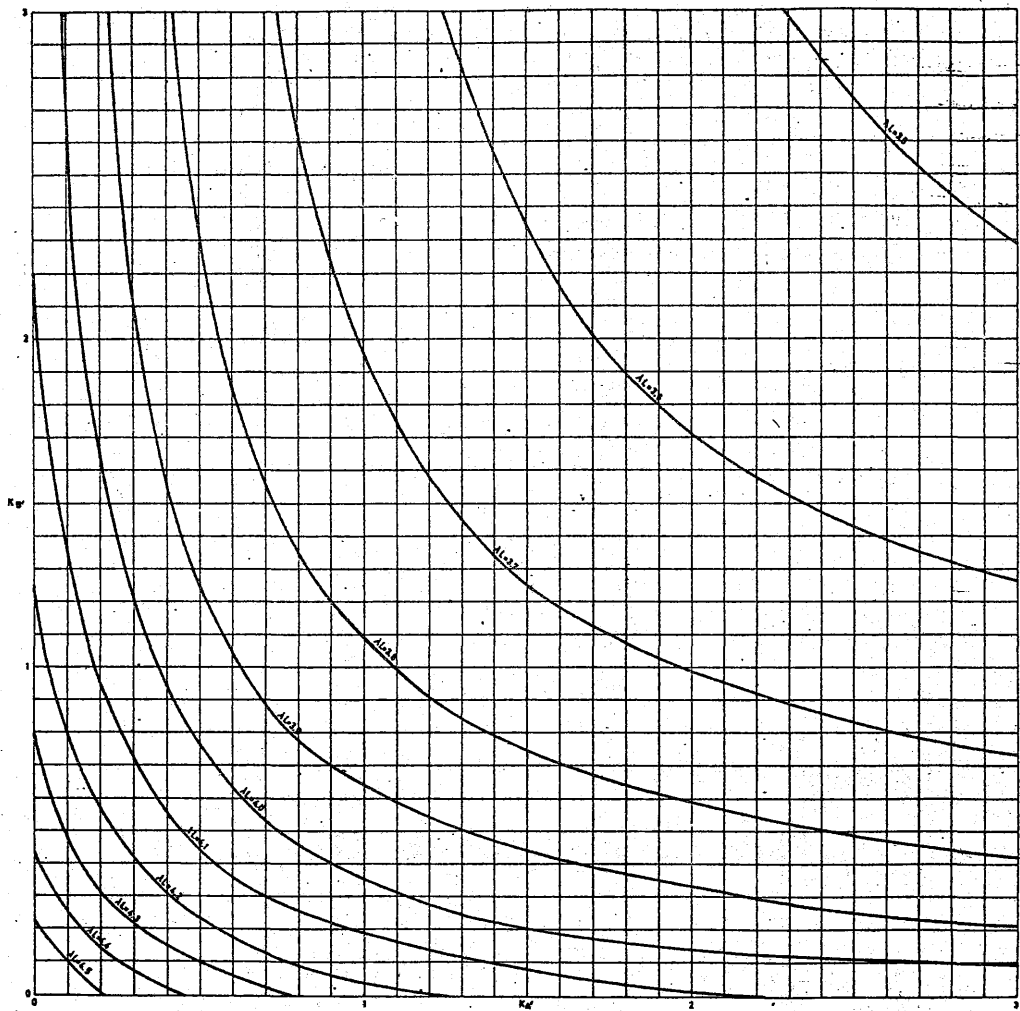
que nos sirve de estudio, esto es la  $A_1 A$ .

El problema se reduce a



- 1) Determinar el ángulo de una viga en sus apoyos, cuando en los extremos actúan momentos armónicos.

Pero esto implica naturalmente:



- 2) Conocer los momentos que actúan en los apoyos del resto de la viga continua cuando en un extremo aplicamos el par unidad.

Vamos a ver sucesivamente los dos problemas.

#### PROBLEMA 1º

Supongamos ahora nuestro problema concreto, esto es, la viga simplemente apoyada en uno de cuyos extremos actúa el par armónico  $M_1 \text{ sen } \omega t$ . Sabemos que

$$y(x, t) = Y(x) \cdot \text{sen } \omega t$$

en donde, si hacemos

$$\lambda^4 = \rho \frac{A}{EI} p^2$$

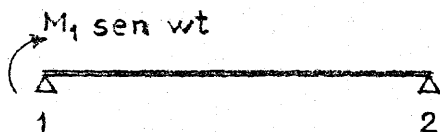


FIGURA 4

$Y(x)$  viene dada por

$$Y(x) = B_1 \text{ sen } \lambda x + B_2 \cos \lambda x + B_3 \text{ sh } \lambda x + B_4 \text{ ch } \lambda x$$

Como las condiciones en los extremos son

$$y = 0, \text{ para } x = 0 \text{ y } x = L$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para } x = L$$

$$-EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = M_1 \text{ sen } \omega t \quad \text{para } x = 0$$

obtenemos los valores

$$y = \left( \frac{-\text{ctg } \lambda L \text{ sen } \lambda x + \cos \lambda x - \text{ch } \lambda x + \text{cth } \lambda L \text{ sh } \lambda x}{2 EI \lambda^2} \right) M_1 \text{ sen } \omega t$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \left( \frac{-\text{ctg } \lambda L \cos \lambda x - \text{sen } \lambda x - \text{sh } \lambda x + \text{cth } \lambda L \text{ ch } \lambda x}{2 EI \lambda} \right) M_1 \text{ sen } \omega t$$

es decir la flecha y la pendiente en cualquier punto de la viga. Como nos interesan los valores en los extremos bastará hacer  $x=0$  y  $x=L$  en los paréntesis y obtenemos

$$a_{11} = \frac{\operatorname{ctgh} \lambda L - \operatorname{ctg} \lambda L}{2EI\lambda}$$

$$a_{21} = \frac{\operatorname{cosech} \lambda L - \operatorname{cosec} \lambda L}{2EI\lambda}$$

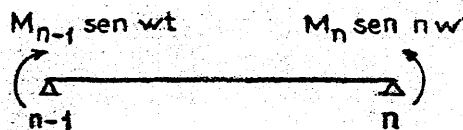
Bishop y Jhonson (ver 9) definen el concepto de receptancia como la amplitud de vibración lineal o angular de un punto cuando un par o fuerza unidad armónica se aplica en otro punto. Según esto, los valores  $a_{rs}$  son las receptancias en el punto  $r$  debidas al par angular actuando en  $s$ .

Naturalmente si actúa un par unidad en el extremo 2 y la viga es uniforme se podrá escribir

$$a_{12} = a_{21}$$

$$a_{22} = a_{11}$$

Por consiguiente, si existen momentos en los dos extremos  $(n-1, n)$  de un tramo en una viga continua, podremos escribir que



$$\left. \begin{array}{l} Y'(0) = M_{n-1} a_{n-1, n-1} + M_n a_{n-1, n} \\ Y'(L_n) = -M_{n-1} a_{n, n-1} - M_n a_{n, n} \end{array} \right\}$$

Vemos además claramente la posibilidad de escribir una ecuación de los tres momentos dinámica, pues en el tramo  $n, n+1$  también

$$Y'(L_n) = M_n a'_{n, n} + M_{n+1} a'_{n, n+1}$$

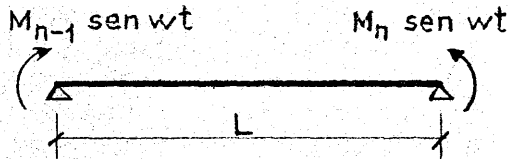
$$Y'(L_{n+1}) = -M_n a'_{n+1, n} - M_{n+1} a'_{n+1, n+1}$$

y teniendo en cuenta la igualdad entre las dos expresiones de  $Y'(L_n)$ , obtenemos, tras ordenar,

$$\underline{M_{n-1} a_{n, n-1} + M_n (a_{nn} + a'_{nn}) + M_{n+1} a'_{n, n+1} = 0}$$

que nos puede servir para los casos de pequeño número de vanos.

En resumen:



$$Y'(0) = a_{n-1, n-1} M_{n-1} + a_{n-1, n} M_n$$

$$Y'(L_n) = -a_{n, n-1} M_{n-1} - a_{n, n} M_n$$

Haremos ahora dos observaciones

1) Las receptancias son  $a = a(\lambda, L, EI)$

Teniendo en cuenta que nuestros tanteos van a ser en función de  $\lambda L$  conviene separar el factor de elasticidad. Para ello

$$a_{11} = \frac{1}{2 EI \lambda} (cth \lambda L - ctg \lambda L) = \frac{3}{2 \lambda L} (cth \lambda L - ctg \lambda L) \cdot \frac{L}{3 EI}$$

$$\underline{\underline{a_{11} = \theta \frac{L}{3 EI}}}$$

Análogamente

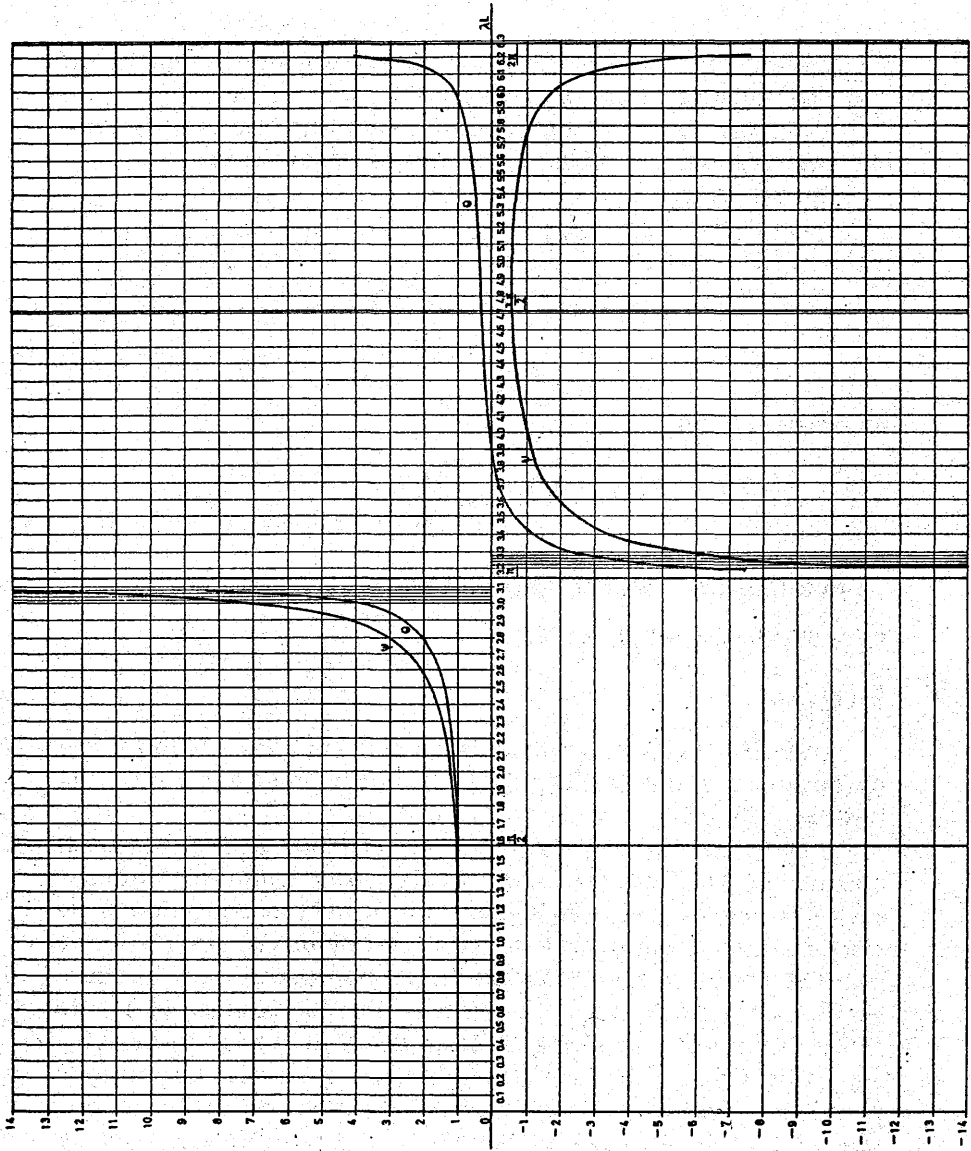
$$a_{12} = \frac{1}{2 EI \lambda} (cosech \lambda L - cosec \lambda L) = \frac{3}{\lambda L} (cosech \lambda L - cosec \lambda L) \cdot \frac{L}{6 EI}$$

$$\underline{\underline{a_{12} = \psi \frac{L}{6 EI}}}$$

Con estas nuevas notaciones es claro que

$$Y'(0) = \frac{M_n L_n \psi_n}{6 E_n I_n}$$

CURVAS  $\theta - \psi - \lambda L$



$$Y' (L_n) = - \frac{m_n L_n \theta_n}{3 E_n I_n}$$

y podemos tabular las funciones  $\theta$  y  $\psi$  en función de  $\lambda L$  lo que nos facilitará los tanteos.

2) Cuando los vanos tienen características diferentes conviene usar uno de ellos como referencia.

Entonces sería

$$L_n = a_n L_o$$

$$m_n = b_n m_o$$

$$h_n^2 = b_n / c_n$$

$$E_n I_n = c_n E_o I_o$$

$$k_n = a_n h_n$$

es evidente que

$$p^2 = \frac{\lambda_n^4 E_n I_n}{m_n} = \frac{\lambda_o^4 E_o I_o}{m_o}$$

y poniendo los valores anteriores  $\lambda_n = h_n \lambda_o$

y también  $\lambda_n L_n = K_n \lambda_o L_o$

#### PROBLEMA 2

Determinar los momentos en los apoyos cuando en el extremo vecino a la viga de referencia actúa un par armónico unidad.

El problema es similar al que se nos presenta en el estudio de la resistencia de materiales. Cuando el número de vanos es pequeño la resolución de las ecuaciones de tres momentos que se presentan es sencilla pero al crecer los vanos por encima de 3, ya empiezan a presentarse serías dificultades; en el caso de la teoría de R. de Materiales esto se obvia utilizando un método iterativo, vg: el de Cross. Vamos a presentar nosotros un método paralelo y que nos permite resolver con sencillez todos los problemas intraslacionales. Un tratamiento similar

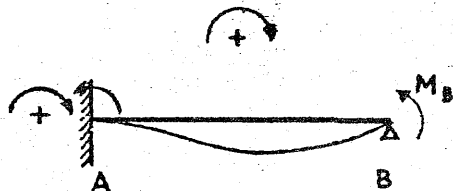


puede verse en Gaskell (10) y Raithel (11).

Empezaremos definiendo conceptos análogos a los empleados en el método de Cross.

### 1) Factor de transmisión.

Es el momento engendrado en el extremo empotrado  $A$  de una viga  $AB$  cuando en el  $B$  se aplica un momento unidad.



Con la convención de signos indicada

$$M_A = c_{AB} M_B$$

Aplicando la ley deducida anteriormente

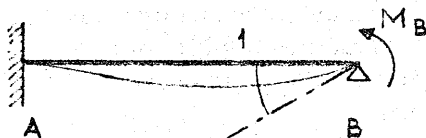
$$0 = \frac{\theta L}{3EI} M_A + \frac{\psi L}{6EI} M_B \rightarrow M_A = -\frac{\psi}{2\theta} M_B$$

Como el momento es el nudo en positivo

$$c_{AB} = \frac{\psi}{2\theta}$$

### 2) Coeficiente de rigidez.

Es el momento que es necesario aplicar en el extremo  $B$  apoyado de una viga  $AB$ , para que se produzca en el mismo una rotación unidad.



Repitiendo la igualdad anterior

$$Y'_B = -\frac{\psi L}{6EI} \left( -\frac{\psi}{2\theta} \right) M_B - \theta \frac{L}{3EI} M_B$$

$$Y'_B = -\frac{M_B L}{12EI} \frac{4\theta^2 - \psi^2}{\theta}$$

Si  $Y'_B = 1$ ,  $M_B = K_{BA}$  y por lo tanto

$$K_{ba} = -\frac{4EI}{L} \left( \frac{3\theta}{4\theta^2 - \psi^2} \right)$$

(Observese que el primer factor es el correspondiente valor estático).

Si la viga fuese articulada en A

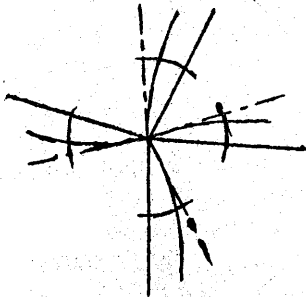
$$Y'_B = -\frac{\theta L}{3EI} M_B$$



$$K_{ba} = -\frac{3EI}{L} \frac{1}{\theta}$$

que es precisamente el correspondiente al conocido valor 3/4 del método de Cross.

### 3) Factor de distribución.



Es el momento que actúa en cada barra de un nudo cuando sobre éste actúa un par unidad.

Si a un nudo con  $n$  barras le obligamos a girar un ángulo unidad mediante un par  $M_1$ , en cada barra se engendrarán momentos que se-

rán los correspondientes coeficientes de rigidez  $K_i$ .

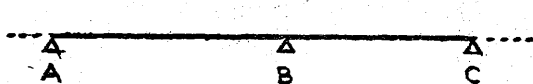
Si aplicamos un par cualquiera

$$M = \frac{M}{\sum k_i} \sum k_i$$

y el valor de cada momento será  $M_i = M \frac{k_i}{\sum k}$

con lo que el factor de distribución es sencillamente  $D = \frac{k_i}{\sum k}$

En la viga continua tan solo son dos los  $k$  a tener en cuenta en cada nudo, por ello, en vg: B, sería



$$D_{bc} = \frac{K_{BC}}{K_{bc} + K_{AB}}$$

$$P_{AB} = \frac{K_{AB}}{K_{BC} + K_{AB}}$$

En cuanto al proceso operativo se comprende que es análogo al de Cross; el único momento de empotramiento existente en el par unidad en el vano de referencia y los restantes se obtienen por iteración equilibrando nudos sucesivamente.

En definitiva, como esquema para resolver la viga continua daremos el siguiente resumen

- 1º. Suponer un valor  $\lambda L$
- 2º. Determinación de los momentos en cada apoyo en función del momento de referencia unidad.
- 3º. Calcular las rotaciones en los extremos a través de los momentos anteriores.
- 4º. Formar las expresiones  $k'_A, k'_B$  y buscar el valor  $\lambda L$  correspondiente en las tablas.

En esquema

$$(\lambda L)_i \rightarrow \theta \rightarrow \phi = k l \theta / EI \rightarrow k'_A, k'_B \rightarrow (\lambda L)_j \longleftrightarrow \omega^2$$

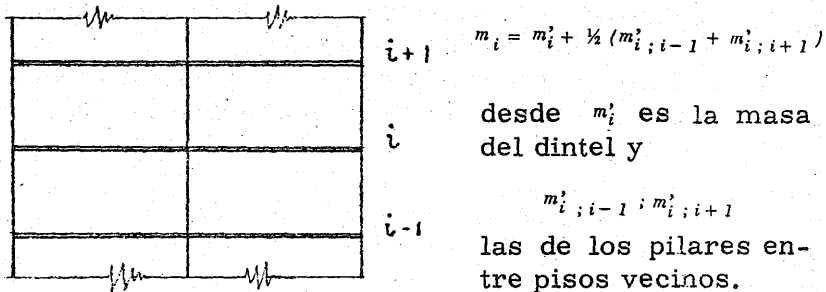
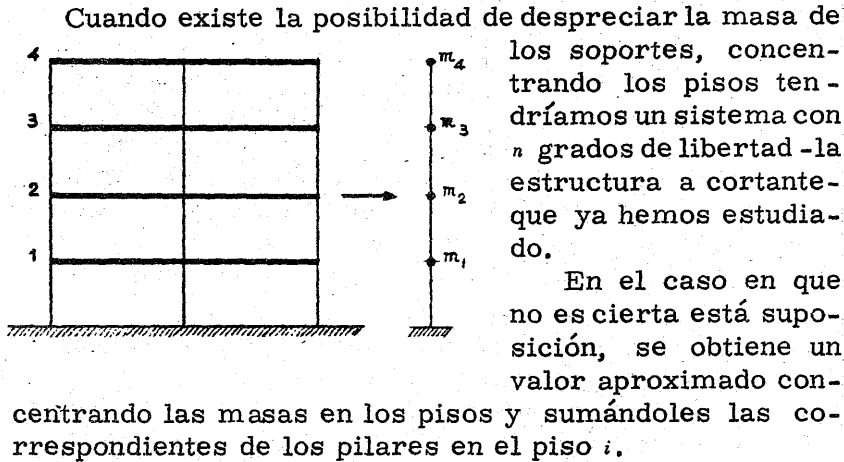
El proceso se repite hasta conseguir la exactitud deseada.

#### PORTICOS INTRASLACIONALES

En el caso de pórticos intraslacionales el método indicado para las vigas continuas se puede utilizar sin más que aumentar el trabajo en cada etapa. Para ello es preciso suponer que la rigidez de los soportes impide su vibración longitudinal y que la transversal no se ve influida por los esfuerzos axiales.

Con estas salvedades vamos a desarrollar el ejemplo siguiente.

## PORTICOS TRANSLACIONALES



Cuando esta hipótesis sea excesivamente burda se puede atacar el problema general de acuerdo con las indicaciones que hacemos a continuación (véase 1).

## PORTICO A CORTANTE CON MASAS DISTRIBUIDAS

Previamente al estudio general vamos a tratar un caso aproximado que, luego, nos servirá como segunda etapa de nuestro trabajo.

Estudiemos el pórtico a cortante suponiendo que las columnas tienen masas distribuidas. La ecuación de las frecuencias es, como antes,

$$|p^2 ||A|| - ||B||| = 0$$

con la salvedad de que la matriz  $||B||$  de rigidez es diferente según veremos. Como el proceso de resolución es iterativo conviene transformar la ecuación. Si tomamos como elemento de referencia un pilar

$$\lambda_o^4 = \frac{m_o p^2}{E_o I_o}$$

y hacemos patente la fila  $i$

$$\left| \frac{E_o I_o}{m_o} \lambda_o^4 ||A|| - ||B|| \right| = 0$$

$$\frac{E_o I_o}{m_o} \lambda_o^4 M_i U_i - \sum_j K_{ij} U_j = 0$$

donde  $M_i$  es la masa del dintel y  $U_i$  la amplitud del movimiento escogido.

Si ponemos  $M_i = b_i m_o$  y  $L_i = A_i L_o$

$$\frac{E_o I_o (\lambda_o L_o)^4}{L_o^3} b_i a_i U_i - \sum_j K_{ij} U_j = 0$$

es decir

$$\left| \frac{E_o I_o (\lambda_o L_o)^4}{L_o^3} ||a_i b_i|| - ||B|| \right| = 0$$

La resolución es por tanteos, suponiendo un  $\lambda_o L_o$  desarrollando el determinante y comprobando si se anula.

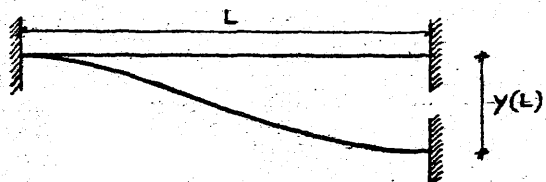
Los valores de  $||B||$  se obtienen como suma en los cortantes que se producen en cada piso cuando todos están

inmóviles y uno solo se mueve (recuérdese el significado de  $K_{ij}$ ).

Para ello conviene estudiar los cortantes que se producen en una viga empotrada o empotrada y apoyada cuando se produce un desplazamiento armónico de sus extremos.

Puede verse que éstos son

### Viga empotrada



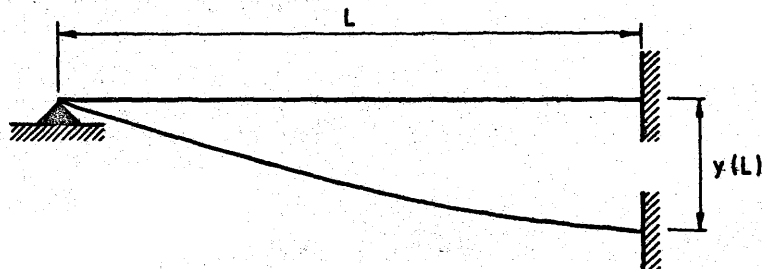
$$M(0) = \frac{6EI}{L^2} \frac{(\lambda L)^2 (\cos \lambda L - \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L)}{6(1 - \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L)}$$

$$M(L) = \frac{6EI}{L^2} \frac{(\lambda L)^2 (\operatorname{sen} \lambda L \operatorname{sh} \lambda L)}{6(1 - \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L)}$$

$$Q(0) = \frac{12EI}{L^2} \frac{(\lambda L)^3 (\operatorname{sen} \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L)}{12(1 - \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L)}$$

$$Q(L) = \frac{12EI}{L^3} \frac{(\lambda L)^3 (\operatorname{sen} \lambda L \operatorname{ch} \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L \cos \lambda L)}{12(1 - \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L)}$$

### Viga empotrada y apoyada



$$M(0) = 0$$

$$M(L) = \frac{3EI}{L^2} \frac{(\lambda L)^2 (\operatorname{sen} \lambda L \operatorname{ch} \lambda L + \cos \lambda L \operatorname{sh} \lambda L)}{3(\operatorname{sen} \lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \cos \lambda L \operatorname{sh} \lambda L)}$$

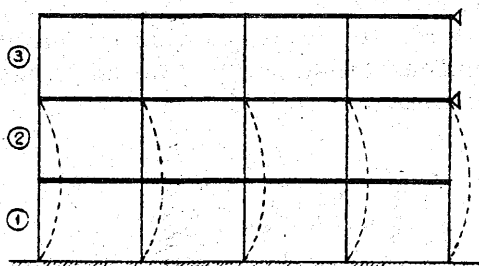
$$Q(0) = \frac{3EI}{L^3} \frac{(\lambda L)^3 (\cos \lambda L + \operatorname{ch} \lambda L)}{3 (\operatorname{sen} \lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \cos \lambda L \operatorname{sh} \lambda L)}$$

$$Q(L) = \frac{3EI}{L^3} \frac{2 (\lambda L)^3 \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L}{3 (\operatorname{sen} \lambda L \operatorname{ch} \lambda L - \cos \lambda L \operatorname{sh} \lambda L)}$$

Con objeto de facilitar los tanteos se pueden utilizar las tablas de Rogers.

#### EJEMPLO

Sea la estructura que indicamos en la figura adjunta.



Si movemos el primer piso en lo alto de las columnas 1.

$$V = \frac{12EI}{L^3} \frac{(\lambda L)^3 (\operatorname{sen} \lambda L \operatorname{ch} \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L \cos \lambda L)}{12 (1 - \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L)}$$

y la misma expresión se utiliza -con valores de  $L$  adecuados- para el extremo inferior del piso 2. Para el superior

$$V = \frac{12EI}{L^3} \frac{(\lambda L)^3 (\operatorname{sen} \lambda L + \operatorname{sh} \lambda L)}{12 (1 - \cos \lambda L \operatorname{ch} \lambda L)}$$

La suma de cortantes en el primer piso daría el valor  $K_{11}$ , el  $K_{21}$ , sería la suma de los producidos en el segundo piso y el  $K_{31} = 0$ . De un modo similar se procedería para el resto de los coeficientes, recordando la simetría

de la matriz  $||B||$

#### PORTICOS TRANSLACIONALES PROPIAMENTE DICHOS

Se resuelven en dos etapas. En la primera se consideran intraslacionales y se determinan los cortantes en cada piso. En la segunda se producen los desplazamientos necesarios para que se anulen dichos cortantes.

Según esto a los cortantes que acabamos de indicar se sumarán los que resultan del pórtico intraslacional y con ellos determinaremos la matriz  $||B||$  y podremos anular el correspondiente determinante.

Para sacar los cortantes en función de los momentos basta ver que si aplicamos un par unidad en el extremo de una viga las reacciones son

$$\left\{ \begin{array}{l} r_A = -\lambda/2 \left( \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda L} + \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda L} \right) \\ r_B = -\lambda/2 (\operatorname{ctg} \lambda L + \operatorname{cth} \lambda L) \end{array} \right.$$

por tanto si existen dos momentos  $M_A$  y  $M_B$  aplicados

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = M_A r_B + M_B r_A \\ R_B = M_A r_A + M_B r_B \end{array} \right.$$

que nos permiten determinar los cortantes asociados a la etapa intraslacional.

#### PIEZAS CURVAS

El estudio de las vibraciones de los arcos no ha alcanzado el grado de desarrollo que acabamos de ver en las estructuras porticadas. En general se utiliza el mé-

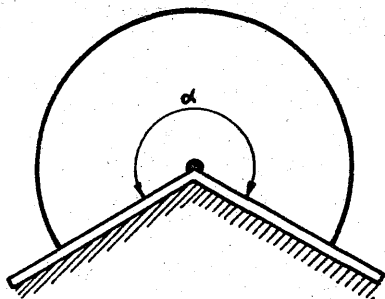


todo de Rayleigh-Ritz, pudiéndose comprobar que, cuando el radio es muy grande en comparación con la luz, las frecuencias naturales son ligeramente inferiores a las de la barra recta con igual sección y luz.

Una descripción útil pese a su antigüedad es la de Lamb (18).

Los métodos matriciales que se aplican en la actualidad, así como algunas referencias, se tantean en (7)..

En el caso de arcos circulares biempotrados con valores de  $\alpha$  comprendidos entre 180 y 360° Den Hartog 20) obtiene que la frecuencia natural es



$$p = f\left(\alpha; \frac{EI_2}{C}\right) \sqrt{\frac{EI_2}{mR^4}}$$

donde

$EI_2$  = rigidez a flexión

$C$  = rigidez a torsión

cuando existe posibilidad de acoplamiento entre vibraciones en los planos de la figura y normal, o bien

$$p = f(\alpha) \sqrt{\frac{EI}{mR^4}}$$

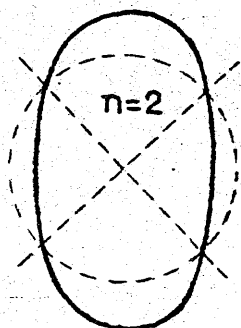
Los valores  $f(\alpha)$  y  $f\left(\alpha; \frac{EI_2}{C}\right)$  se dan en gráficos

(f; a) en la referencia citada.

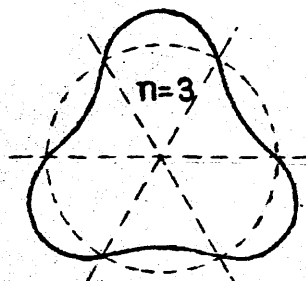
Cuando el anillo circular es completo con masa y rigidez uniforme, se demuestra (ver Timoshenko (1) que es la forma respecto al desarrollo de la circunferencia es una senoide y las frecuencias son

$$P_f = \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \sqrt{\frac{EI}{m R^4}}$$

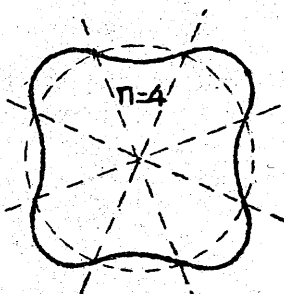
donde  $m$  es la masa por unidad de longitud,  $EI$  la rigidez,  $R$  el radio y  $n$  el número de ondas que se forman



$$p = 2,68 \sqrt{\frac{EI}{m R^4}}$$



$$p = 7,59 \sqrt{\frac{EI}{m R^4}}$$



$$p = 14,55 \sqrt{\frac{EI}{m R^4}}$$

En el caso en que, además, es posible la vibración fuera del plano del anillo las frecuencias angulares son

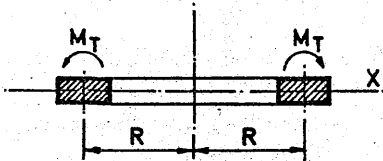
$$P_f = \frac{n(n^2 - 1)^2}{\sqrt{n^2 + 1 + \nu}} \sqrt{\frac{EI}{mR^4}}$$

donde  $\nu$  es el módulo de Poisson. Es decir las frecuencias en ambos casos son prácticamente iguales.

Si lo que se estudian son vibraciones radiales la frecuencia es

$$P_r = \sqrt{\frac{EA}{mR^2}} \sqrt{1 + n^2}$$

y si se estudian las de torsión



$$P_t = \sqrt{\frac{EA}{mR^2}} \sqrt{1 + n^2} \sqrt{\frac{I_x}{I_p}}$$

donde  $I_x$  es el momento de inercia de la sección transversal respecto al eje  $X$  e  $I_p$  el momento polar de inercia de la misma. Es útil recordar que si llamamos  $c$  a la velocidad de propagación del sonido a lo largo de la barra

$$\sqrt{\frac{EA}{mR^2}} = \frac{c}{R}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 P_f &= \frac{n(n^2-1)^2}{\sqrt{n^2+1+\nu}} \cdot \frac{C\sqrt{A}}{R^2} \\
 P_r &= \sqrt{1+n^2} \cdot \frac{C}{R} \\
 P_t &= \sqrt{1+n^2} \cdot \sqrt{\frac{I_x}{I_p}} \cdot \frac{C}{R}
 \end{aligned}$$

Las frecuencias  $P_r$  y  $P_t$  son pues muy altas comparadas con  $P_f$ .

Se adjuntan como complemento las curvas que dan las frecuencias de vibración, dentro y fuera de su plano, de los arcos circular parabólico.

Las curvas están extraídas de una memoria de Volterra (ver 19) indispensable para la comprensión del problema.

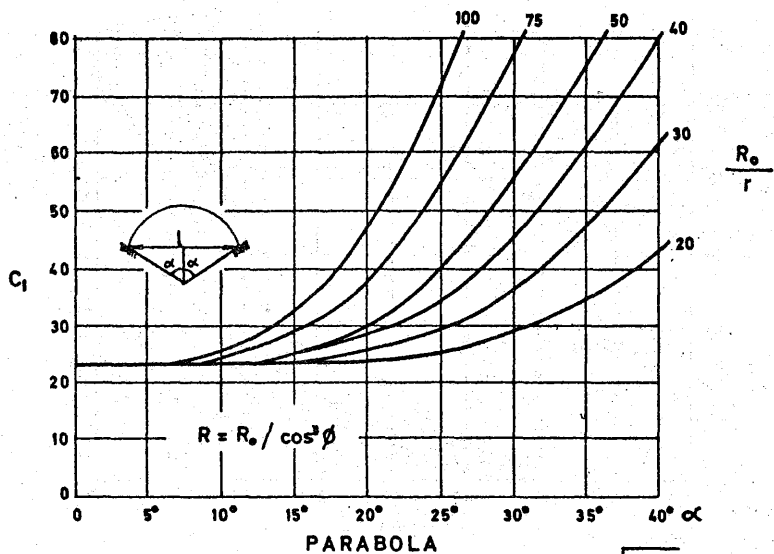
El planteamiento se hace una vez más mediante el método energético utilizando las fórmulas generales para los esfuerzos interiores en piezas curvas que desarrolla Love en su conocido tratado de elasticidad.

Además de los valores para parábola y círculo que se adjuntan, Volterra incluye los resultados para catenaria y elipse, con lo que el gráfico final es de gran interés.

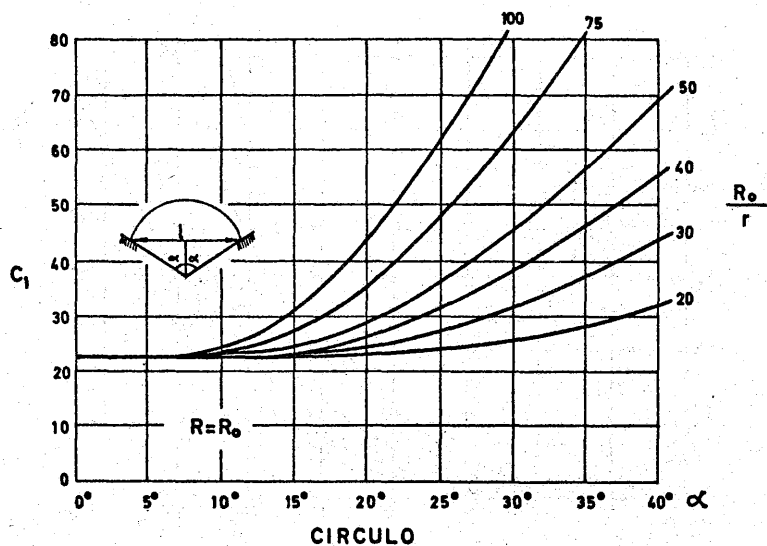
Por su generalidad el método puede ser aplicado a casos más complejos y es imprescindible su lectura por el estudioso.

# FRECUENCIAS PROPIAS DE VIBRACION EN EL PLANO DEL ARCO

$$\omega = \frac{C}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho \pi}}$$

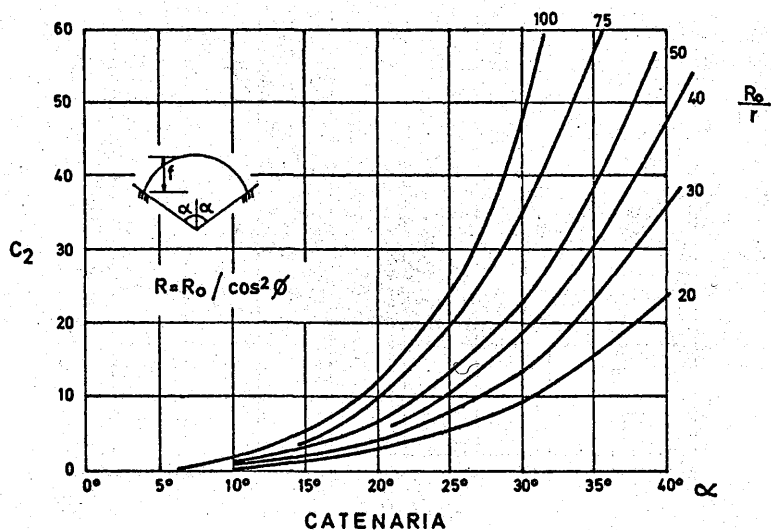
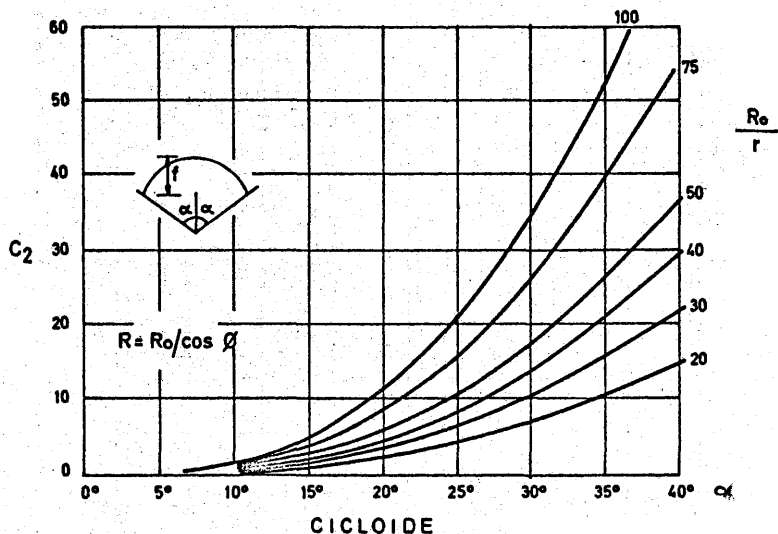


$$r = \sqrt{I/A}$$



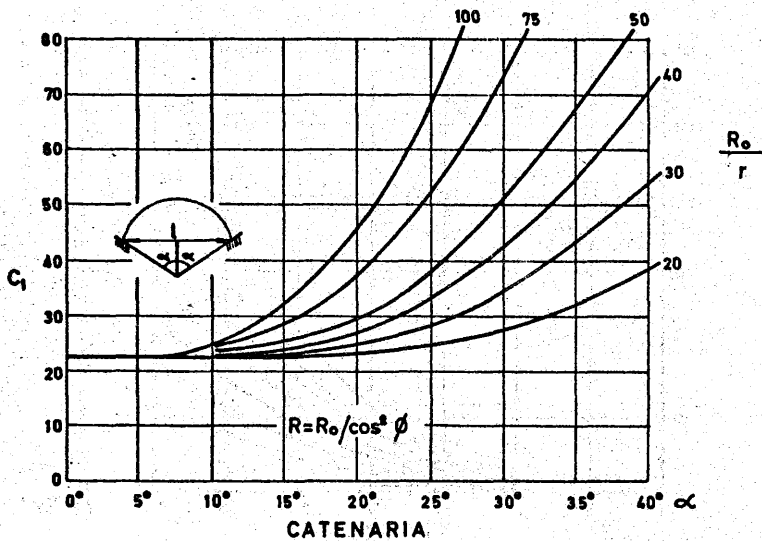
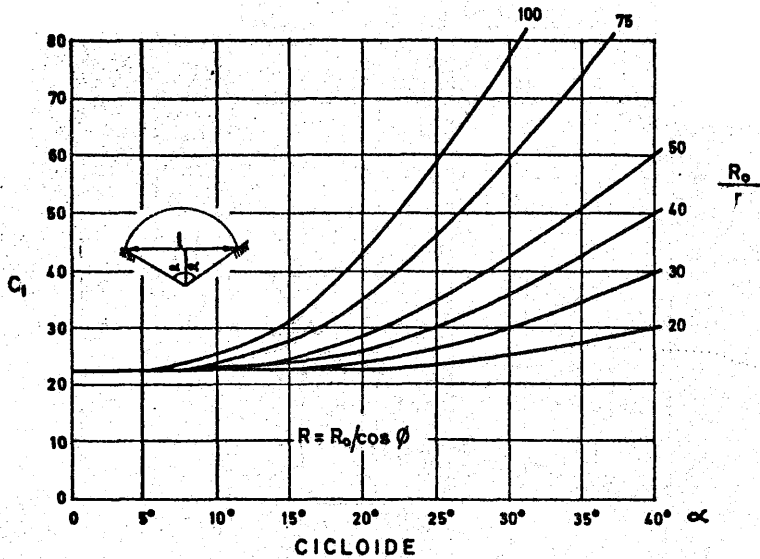
# FRECUENCIAS PROPIAS DE VIBRACION FUERA DEL PLANO DEL ARCO

$$\omega = \frac{C}{f^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho \pi}}$$



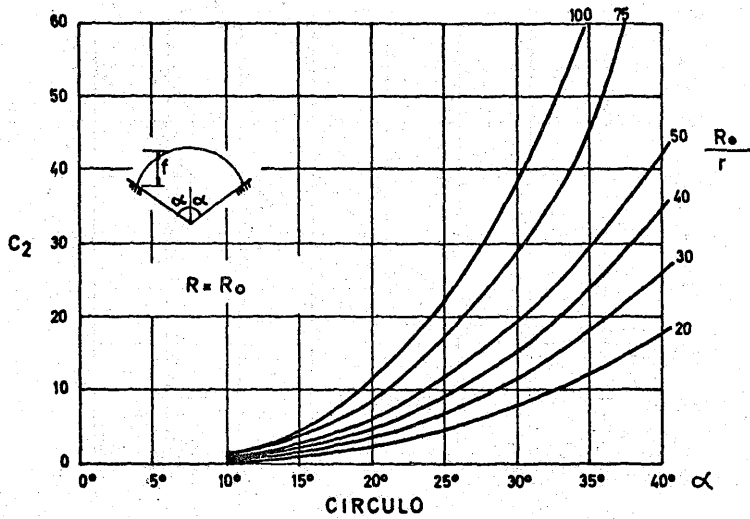
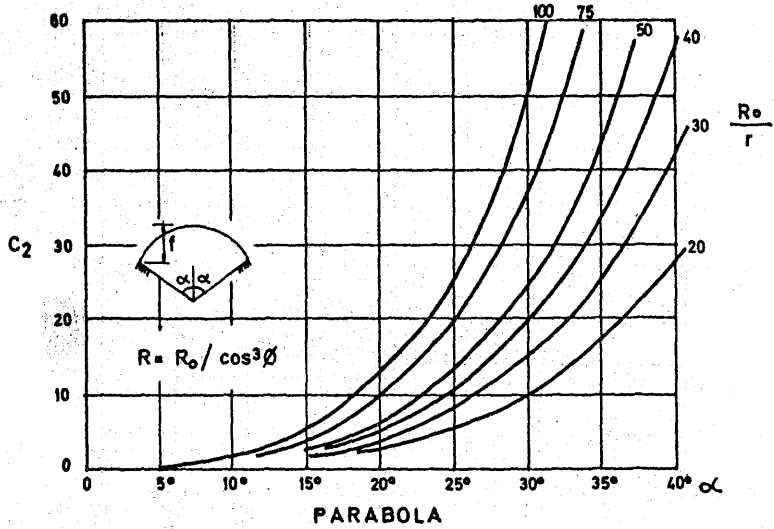
# FRECUENCIAS PROPIAS DE VIBRACION EN EL PLANO DEL ARCO

$$\omega = \frac{C}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho \pi}}$$



# FRECUENCIAS PROPIAS DE VIBRACION FUERA DEL PLANO DEL ARCO

$$\omega = \frac{C}{f^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho \pi}}$$





## VIBRACIONES FORZADAS

La ecuación que rige el movimiento es

$$EI y^{IV} + m \ddot{y} = \omega$$

donde  $\omega$ , intensidad es la carga, varía con el tiempo y con la abscisa considerada.

Con objeto de resolver la ecuación vamos a utilizar coordenadas normales  $q(t)$  y funciones de forma  $Y(x)$ . Mediante ellas se puede definir

$$y(x,t) = \sum Y_i(x) \cdot q_i(t)$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} \int m \dot{y}^2 dx$$

La energía elástica

$$U = \frac{1}{2} \int EI y''^2 dx$$

La función de disipación

$$W = \frac{1}{2} \int c \dot{y}^2 dx$$

donde  $c$  es el amortiguamiento p. m. l. de viga.

Como

$$\dot{y}(x,t) = \sum Y_i(x) \dot{q}_i(t)$$

$$y''(x,t) = \sum Y_i''(x) \cdot \dot{q}_i(t)$$

y la  $r$ -ésima ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} = N_r$$

teniendo en cuenta la ortogonalidad de los modos y poniendo

$$\int m Y_r^2(x) dx = M_r$$

$$\int m Y_r \cdot Y_i dx = 0 \quad (i \neq r)$$

Si se admite amortiguamiento proporcional

$$C = 2 \beta m$$

La ecuación de Lagrange se escribe

$$M_r \ddot{q}_r + 2 \beta M_r \dot{q}_r + M_r p_r^2 q_r = N_r$$

o, bien

$$\ddot{q}_r + 2 \beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{N_r}{M_r}$$

que es la ecuación r-ésima desacoplada del movimiento.

Respecto a  $N_r$  puede expresarse a través de las funciones de forma según ya dijimos

$$N_r = \int W(x; t) \cdot Y_r(x) dx$$

y si

$$W(x; t) = \frac{P_0}{L} p(x) \cdot f(t)$$

$$N_r = \frac{P_0}{L} f(t) \int p(x) Y_r(x) dx$$

Al cociente

$$\Gamma_r = \frac{1}{L} \int p(x) Y_r(x) dx$$

se le llama "factor de participación" pues se refiere a la importancia de cada modo r respecto a la fuerza actuante.

Como

$$N_r = P_o f(t) \Gamma_r$$

la ecuación r-ésima es

$$\ddot{q}_r + 2\beta \dot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{P_o \Gamma_r}{M_r} f(t)$$

La solución se consigue a través de la transformación de Laplace. Si se hace

$$q_r(0) = \dot{q}_r(0) = 0$$

$$q_r(s)(s^2 + 2\beta s + p_r^2) = \frac{P_o \Gamma_r}{M_r} f(s)$$

Si independizamos

$$H(s) = \frac{p_r^2}{(s+\beta)^2 + (p_r^2 - \beta^2)}$$

$$q_r(s) = \frac{P_o \Gamma_r}{p_r^2 M_r} H(s) f(s)$$

y

$$q_r(t) = \frac{P_o \Gamma_r}{p_r^2 M_r} L^{-1} \{ [H(s) f(s)] \}$$

Precisamente  $L^{-1}[H(s) f(s)]$  es el factor de amplificación dinámica de la carga, expresable a través de la integral de convolución.

El cálculo se puede realizar tomando en consideración todas las funciones de forma o un número limitado que se juzgue suficiente.

## BIBLIOGRAFIA

- 1 PAUL A. CRAFTON: "Shock and vibration in linear systems"  
Harper & Brodthers.
- 2 MASSANOBU SHINOZUKA a L. HENRY: "Random vibration of a beam colum"  
Proceedings of the A.S.C.E. oct. 1965. EM-5 págs. 123 a 143.
- 3 COOPER: "The propagation of elastic waves in a rod".  
The Philosophical Magazine 1947 págs. 1 á 22.
- 4 H. ARNOLD: "Nuevos procedimientos de medida y ensayo de esfuerzos dinámicos y geométricos en cables".  
Der Stahlbau. Febr. 1970, págs. 33 á 46
- 5 WEN-HSIUNG LI: "Elastic flexible cable in plane motion under tension"  
Journ. of Applied, Mech. Dcbre. 1959, págs. 587 á 593.
- 6 E. KRYNICKI a. Z. MAZURKIEWICZ: "Free vibration of a bar with variable cross section " Journal of Applied Mechs. sept. 1962 págs. 497 á 501.
- 7 J. REY PASTOR: "Los problemas lineales de la Física".  
Intaet 1955.
- 8 FREBERG Y KEMLER: "Elements of mechanical vibration".  
J. Wiley 1949.
- 9 ZIGNOLI: "Construconi metaliche"  
Hoepli 1968.
- 10 BLEICH: "Theorie un Berechnung der Eisernen Brücken "  
Springer 1924.
- 11 JACOBSEN Y AYRE: "Engineering vibrations"  
Mc Graw 1958.
- 12 G. B. WARBURTON: "The dynamical behaviour of structures"  
Pergamon 1964.
- 13 WOINOWSKY - KRIEGER: "J. Appl. Mech. Trans. Amer. Soc. Mech Engrs, 72, 35. 1950.
- 14 POLHANSEN: "Berechnung der eigenschwingungen statisch bestimmter Fachwerke". Z. angen Math. u. Mech. 1921. S. 28.
- 15 NESTORIDES: "A. Handbook of torsional vibration"  
Cambridge. 1958.

- 16 TIMOSHENKO Y YOUNG: "Problemas de vibración en ingeniería"  
Cecsa 1960.
- 17 BISHOP Y JOHNSON: "The mechanics of vibration"  
Cambridge 1960.
- 18 BISHOP, GLADWELL Y MICHAELSON: "The matrix analysis of vibration"  
Cambridge 1965.
- 19 GASKELL: "On moment balancing in structural dynamics"  
Quarterly of Applied Mathematics V.1 pp 237-249. 1943
- 20 A. RAITHEL: "La dinamica dei sistemi solidali"  
Giornale del Genio civile 1952.
- 21 BISPLINHOFF, HOLT Y HALFMAN: "Aeroelasticidad"  
Addison-Wesley Pub. comp. Inc. Cambridge, Mass, 1955.
- 22 PESTEL Y LECKIE: "Matrix methods in elasto-mechanics"  
Mc Graw-Hill, 1963.
- 23 E. B. COLE: "Theory of vibrations for engineers"  
Crosby Lockwood, 1961.
- 24 MEIROVITCH: "Analytical methods in vibrations"  
Mc Millan 1967.
- 25 D. BURGEEEN: "End-fixity effect on vibration and instability"  
Journal of the Eng. Mechanic. Div. Proceedings ASCE Diciembre, 1960.  
EM. 6.
- 26 F. L. RYDER: "Electrical Energy Analogs of vibrating beams"  
Journal of E.M.D. Proceed. ASCE. Oct. 60 EM. 5
- 27 F. Y. CHENG: "Vibrations of Timoshenko beams and frameworks"  
J.E.M.D. Proc. ASCE Marzo 1970.
- 28 NEUBERT - HAHN - LEE: "Lumped parameter beams based on impedance  
methods" J.E.M.D. Proc. ASCE Febrero 1970.
- 29 LEIMBACH-MC DONALD: "Free vibration of two-dimensional frameworks"  
J.S.D. Proc. ASCE, Febrero 70.
- 30 W. HURTY: "Vibrations of structural systems by component mode synthesis"  
J.E.M.D. Proc. ASCE. Agosto 1960.
- 31 MALLICK - SEVERN: "Dynamic characteristics of infilled frames"  
Proc. ICE, 1968. art. 7067, pag. 261 a 287.
- 32 NORRIS - HANSEN: "Structural design for dynamic loads".  
Mc Graw-Hill, 1959.
- 33 H. LAMB: "Proc. London. Math. Soc. Vol 19 p. 365. 1888.

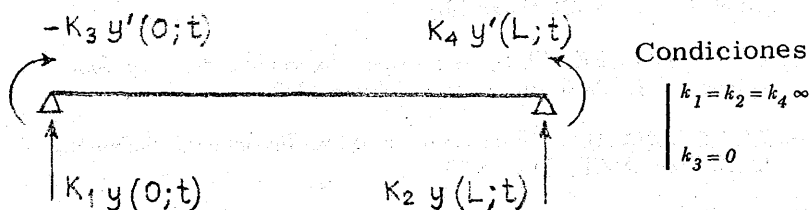
- 34 VOLTERRA - MORELL: "On the fundamental frequencies of curved beams"  
Buletin. Inst. Politech. Din Isai, Serie Nova, Vol 7, 1961.
- 35 DEN HARTOG: "Vibrations mechaniques".  
Dunod 1960.
- 36 VOLTERRA AND MORELL: "A Note of the lowest natural frequency of  
elastic arcs" Journal of Appl. Mech. 1960.
- 37 VOLTERRA Y ZACHMANOUGLU: "Dynamics of vibrations"  
C. Merrill 1965.
- 38 M. CAIRONI: "Sul calcolo delle vibrazioni naturali: flessionali delle travi tipo  
Gerber" Construzioni metalliche, n° 6; 1962.
- 39 BIGGS: "Introduction to structural dynamics"  
Mc Graw-Hill 1964
- 40 KOLOUSEK: "Calcul des efforts dynamiques dans les ossatures rigides"  
Dunod 1959.
- 41 ARRIAGA: "Contribution to the study of torsional vibrations in shafts"  
Symposium Rilem 1963.

## PROBLEMAS

### Problema 1

Vamos a estudiar el caso de la viga empotrada y apoyada.

$$Y = C_1 \operatorname{sen} \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \operatorname{ch} \lambda x$$



Dividiendo la primera fila por  $k_1 = \infty$ ; haciendo  $k_3 = 0$  en la segunda y dividiendo por  $k_2$  y  $k_4$  la tercera y cuarta filas, el determinante de frecuencias es

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sen} \lambda L & \cos \lambda L & \operatorname{sh} \lambda L & \operatorname{ch} \lambda L \\ \cos \lambda L & -\operatorname{sen} \lambda L & \operatorname{ch} \lambda L & \operatorname{sh} \lambda L \end{vmatrix} = 0$$

Las ecuaciones de  $C$  son entonces

$$\left\{ \begin{array}{l} C_2 + C_4 = 0 \\ -C_2 + C_1 = 0 \\ C_1 \operatorname{sen} \lambda L + C_2 \cos \lambda L + C_3 \operatorname{sh} \lambda L + C_4 \operatorname{ch} \lambda L = 0 \\ C_1 \cos \lambda L - C_2 \operatorname{sen} \lambda L + C_3 \operatorname{ch} \lambda L + C_4 \operatorname{sh} \lambda L = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} C_2 = C_4 = 0 \\ C_3 = -C_1 \frac{\operatorname{sen} \lambda L}{\operatorname{sh} \lambda L} \end{array}$$

$$Y_n = C_n \left( \frac{\operatorname{sen} \lambda_n x}{\operatorname{sen} \lambda_n L} - \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x}{\operatorname{sh} \lambda_n L} \right)$$

Mientras que la ecuación de frecuencias es obtenida al desarrollar

$$\Delta \equiv \operatorname{tg} \lambda L \operatorname{cth} \lambda L = 1$$

es decir  $\operatorname{tg} \lambda L = \operatorname{th} \lambda L$

$$\lambda_n L = n\pi + 0,72 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 L = 3,86 \\ \lambda_2 L = 7 \\ \dots \end{array} \right.$$

La determinación de  $C_n$  se hace a través de

$$\Gamma = \int_a^b m Y_n^2 dx = \left[ \frac{x}{4\lambda_n^2} (\lambda_n^4 Y_n^2 - 2Y_n' Y_n''' + Y_n''^2) \right]_a^b$$

Las condiciones son  $Y_0 = Y_0'' = Y_L = Y_L' = 0$

$$\Gamma = \frac{Lm}{4\lambda_n^4} Y_n''''(L)$$

$$Y_n'''' = -C_n \lambda_n^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \lambda_n x}{\operatorname{sen} \lambda_n L} + \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x}{\operatorname{sh} \lambda_n L} \right)$$

$$Y_n''''(L) = -C_n \lambda_n^2 \cdot 2 \rightarrow \Gamma = \frac{Lm}{4\lambda_n^4} 4 C_n^2 \lambda_n^4 = Lm C_n^2$$

Con objeto de normalizar

$$l = L \cdot m \cdot C_n^2$$

$$C_n = \sqrt{\frac{l}{Lm}}$$

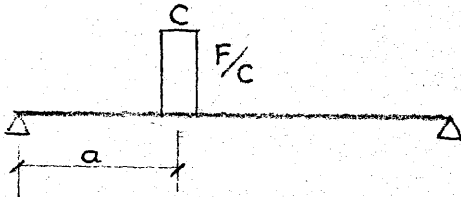
y por tanto

$$\bar{Y}_n = \frac{l}{\sqrt{Lm}} \left( \frac{\operatorname{sen} \lambda_n x}{\operatorname{sen} \lambda_n L} - \frac{\operatorname{sh} \lambda_n x}{\operatorname{sh} \lambda_n L} \right)$$

Si, por ejemplo, actúa una carga puntual en  $x=a$  de valor  $F$

$$f(x) = \sum A_n \bar{Y}_n$$

$$y \quad A_n = \int_{a'}^{b'} m f(x) \bar{Y}_n dx$$



$$A_n = \frac{F}{C} \int_{a-\frac{C}{2}}^{a+\frac{C}{2}} m \bar{Y}_n dx$$

Cuando  $c$  tiende a cero

$$A_n = F m \bar{Y}_n(a)$$



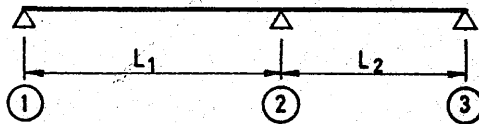
y por tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum F_m \bar{Y}_n(a) \bar{Y}_n(x) \\ &= F_m \sum \bar{Y}_n(a) \cdot \bar{Y}_n(x) \end{aligned}$$

En nuestro caso

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{F_m}{(\sqrt{L_m})^2} \sum \left( \frac{\text{sen } \lambda_n x \text{ sen } \lambda_n a}{\text{sen}^2 \lambda_n L} - \frac{\text{sh } \lambda_n x \cdot \text{sh } \lambda_n a}{\text{sh}^2 \lambda_n L} \right) - \\ &- \left( \frac{\text{sen } \lambda_n x \text{ sh } \lambda_n a}{\text{sen } \lambda_n L \cdot \text{sen } \lambda_n L} + \frac{\text{sh } \lambda_n x \cdot \text{sen } \lambda_n a}{\text{sh } \lambda_n L \cdot \text{sen } \lambda_n L} \right) \end{aligned}$$

## Problema 2



La ecuación de los tres momentos es:

$$M_{n-1} \alpha_{n;n-1} + M_n (\alpha_{nn} + \alpha'_{nn}) + M_{n+1} \alpha'_{n;n+1} = 0$$

Como  $M_1 = M_3 = 0$  se reduce a

$$\begin{aligned} M_2 (\alpha_{22} + \alpha'_{22}) &= 0 \\ \alpha_{22} &= \frac{\text{cth } \lambda L_1 - \text{ctg } \lambda L_1}{2 E_1 I_1 \lambda} \\ \alpha'_{22} &= \frac{\text{cth } \lambda L_2 - \text{ctg } \lambda L_2}{2 E_2 I_2 \lambda} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha_{22} &= \frac{\text{cth } \lambda L_1 - \text{ctg } \lambda L_1}{2 E_1 I_1 \lambda} \\ \alpha'_{22} &= \frac{\text{cth } \lambda L_2 - \text{ctg } \lambda L_2}{2 E_2 I_2 \lambda} \right\} \text{ Si } E_1 I_1 = E_2 I_2$$

la ecuación es

$$\text{ctg } \lambda L_1 - \text{ctg } \lambda L_1 = \text{ctg } \lambda L_2 - \text{cth } \lambda L_2$$

Si en lugar de receptancias utilizamos los valor  $\theta$  y  $\psi$  la ecuación de los tres momentos es

$$\frac{M_{n-1} A_n \psi_n}{6 C_n} + \frac{M_n}{3} \left( \frac{A_n \theta_n}{C_n} + \frac{A_{n+1} \theta_{n+1}}{C_{n+1}} \right) + \frac{M_{n+1} A_{n+1} \psi_{n+1}}{6 C_n} = 0$$

y en nuestro caso  $A_n \theta_n + A_{n+1} \theta_{n+1} = 0$

$$\text{Sea } \left\{ \begin{array}{l} A_{n+1} = 1,75 A_n \\ b_n = b_{n+1} = C_n = C_{n+1} = h_n = h_{n+1} = 1 \\ K_n = 1 \\ K_{n+1} = 1,75 \end{array} \right.$$

$$\theta_n (\lambda_o L_o) = - \frac{A_{n+1}}{A_n} \theta_{n+1} (1,75 \lambda_o L_o) = -1,75 \theta_{n+1} (1,75 \lambda_o L_o)$$

Para resolverlo por tanteos supongamos:

Tanteo 1

$$\lambda_o L_o = 2,4 \quad ; \quad 1,75 \lambda_o L_o = 4,2$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta(2,4) = 1,318 \\ \theta(4,2) = 0,1564 \end{array} \right\} \text{no es posible la igualdad}$$

Tanteo 2

$$\lambda_o L_o = 2 \quad ; \quad 1,75 \lambda_o L_o = 3,5$$

$$\theta(2) = 1,1212$$

$$\theta(3,5) = -0,7148 \quad ; \quad -1,75 \theta(3,5) = 1,25$$

$$\theta(2) < -1,75 \theta(3,5)$$

Tanteo 3

$$\lambda_o L_o = 2,01 \quad ; \quad 1,75 \lambda_o L_o = 3,52$$

$$\theta(2,01) = 1,124$$

$$\theta(3,52) = -0,64 \quad ; \quad -1,75 \theta(3,52) = \underline{\underline{1,12}}$$

Podemos, pues, aceptar el tanteo.

$$p^2 = \frac{\lambda_o^4 E_o I_o}{M_o} = 2,01^4 \frac{E_o I_o}{M_o L_o^4} ; p = 4,04 \quad \sqrt{\frac{E_o I_o}{M_o L_o^4}}$$

donde  $L_o = L_1$

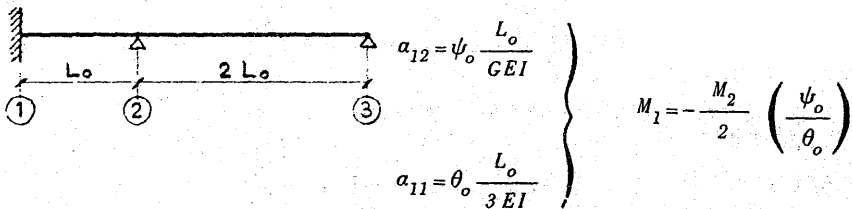
### EJEMPLO 2°

Supongamos ahora que un extremo está empotrado

$$Y'(o) = 0$$

$$M_{n-1} = - \frac{a_{n-1;n}}{a_{n-1;n-1}} M_n$$

### Problema 3



La ecuación de los tres momentos es entonces

$$-\frac{M_2}{2} \left( \frac{\psi_o}{\theta_o} \right) \frac{A_o \psi_o}{6} + \frac{M_2}{3} (A_o \theta_o + A_1 \theta_1) = 0$$

$$-\frac{M_2}{2} \frac{\psi_o^2}{\theta_o} + 2 M_2 (\theta_o + 1,2 \theta_1) = 0$$

$$\psi_o^2 = 4 (\theta_o^2 + 1,2 \theta_1 \theta_o)$$

La forma de resolución más sencilla es por tanteos como antes.

### Tanteo 1

$$\left. \begin{array}{l} \lambda L = 4,10 \\ \theta(4,10) = 0,109 \\ \theta(4,94) = 0,374 \\ \psi(4,10) = -0,9185 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 1,2 \lambda L = 4,94 \\ \theta_o^2 = 0,0119 \\ 1,2 \theta_o \theta_1 = 0,049 \\ \psi_o^2 = 0,84 > 0,24 (\epsilon = 0,6) \end{array} \right\} 4 \Sigma = 0,24$$

### Tanteo 2

$$\lambda L = 4,5 \quad ; \quad 1,2 \lambda L = 5,4$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta(4,5) = 0,2615 \\ \theta(5,4) = 0,5059 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \theta_o^2 = 0,06 \\ 1,2 \theta_o \theta_1 = 0,15 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \theta(4,5) \\ \theta(5,4) \end{array}} \right\} 4 \Sigma = 0,84$$

$$\psi(4,5) = -0,6968 \quad ; \quad \psi_o^2 = 0,485 < 0,84 \quad (\epsilon = -0,355)$$

Tanteo 3  $\lambda L = 4,30 \quad 1,2 \lambda L = 5,15$

$$\left. \begin{array}{l} \theta(4,3) = 0,1964 \\ \theta(5,15) = 0,428 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \theta_o^2 + 1,2 \theta_1 \theta_o = 0,0385 + 0,1 = 0,1385 \\ 4 \Sigma = 0,554 \end{array}$$

$$\psi(4,30) = -0,7805 \quad \psi^2 = 0,65 \quad ; \quad \epsilon = 0,051$$

Tanteo 4

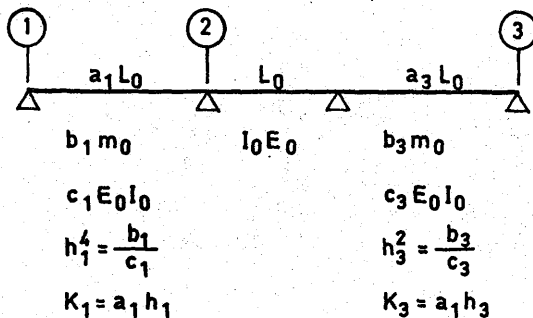
$$\left. \begin{array}{l} \theta(4,32) = 0,2036 \\ \theta(5,18) = 0,4358 \\ \psi(4,32) = -0,77 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda L = 4,32 \quad ; \quad 1,2 \lambda L = 5,18 \\ 4 \Sigma = 0,584 \\ \psi^2 = 0,591 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \theta(4,32) \\ \theta(5,18) \\ \psi(4,32) \end{array}} \right\} \epsilon = 0,007$$

$$\lambda L = 4,32$$

$$p = 18,7 \quad \sqrt{\frac{E_o I_o}{M_o L_o^4}}$$

Problema 4

La viga de tres tramos se resuelve muy comodamente tomando el vano central como referencia



$$\left| \begin{array}{l} K_a^I = \frac{4 E_o I_o \phi_A}{L_o} \\ K_3^I = \frac{4 E_o I_o \phi_B}{L_o} \end{array} \right|$$

$\phi_A$  y  $\phi_B$  son precisamente las receptancias  $a_{22}$  y  $a_{33}$

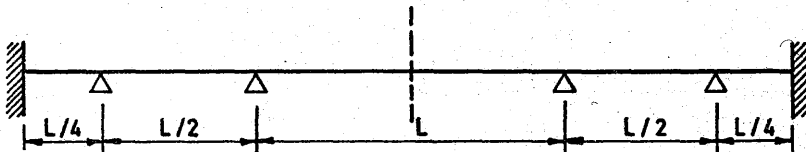
$$\left\{ \begin{aligned} \phi_A &= \frac{\theta_1 L_{12}}{3 (EI)_{12}} = \frac{\theta (h_1 \lambda_o L_o) \cdot A_1 L_o}{3 C_1 E_o I_o} \\ \phi_B &= \frac{\theta (h_3 \lambda_o L_o) \cdot A_3 L_o}{3 C_3 E_o I_o} \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} K_A^I &= \frac{4}{3} \cdot \frac{A_1}{C_1} \cdot \theta (h_1 \lambda_o L_o) \\ K_B^I &= \frac{4}{3} \cdot \frac{A_3}{C_3} \cdot \theta (h_3 \lambda_o L_o) \end{aligned}}$$

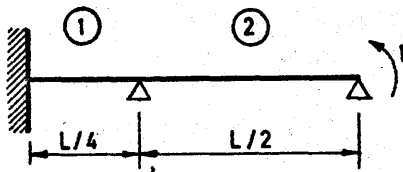
El procedimiento consistirá en suponer un  $\lambda_o L_o$  obtener  $(K_A^I ; K_B^I)$  y de ellos el número  $\lambda L$  hasta que dos valores sucesivos sean suficientemente próximos.

#### Problema 5

Sea la viga continua que esquematizamos.



De acuerdo con lo dicho empezaremos determinando las características estructurales



Rigideces del tramo.

$$\left\{ \begin{array}{l} K_1 = \frac{4 EI}{L_1} \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) = \frac{4 E_o I_o}{0,25 L_o} \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) \\ K_2 = \frac{3 EI}{L_2} \frac{1}{\theta_2} = \frac{3 E_o I_o}{0,5 L_o} \frac{1}{\theta_2} \end{array} \right.$$

$$K_1 + K_2 = \frac{E_o I_o}{L_o} \left[ 16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) + 6 \frac{1}{\theta_2} \right]$$

Rigideces relativas factores de distribución.

$$r_1 = \frac{16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right)}{16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) + 6 \frac{1}{\theta_2}}$$

$$r_2 = \frac{6 \frac{1}{\theta_2}}{16 \left( \frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} \right) + 6 \frac{1}{\theta_2}}$$

Factores de transmisión.

$$c_1 = \frac{\psi_1}{2 \theta_1}$$

$$c_2 = \frac{\psi_2}{2 \theta_2}$$

Empecemos tanteando

$$\lambda_o L_o = 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 \lambda_o L_o = 1 \\ k_2 \lambda_o L_o = 2 \end{array} \right.$$

$$\theta_1 = \theta(1) = 1,006$$

$$\psi_1 = \psi(1) = 1,012$$

$$\theta_2 = \theta(2) = 1,1212$$

$$\psi_2 = \psi(2) = 1,236$$

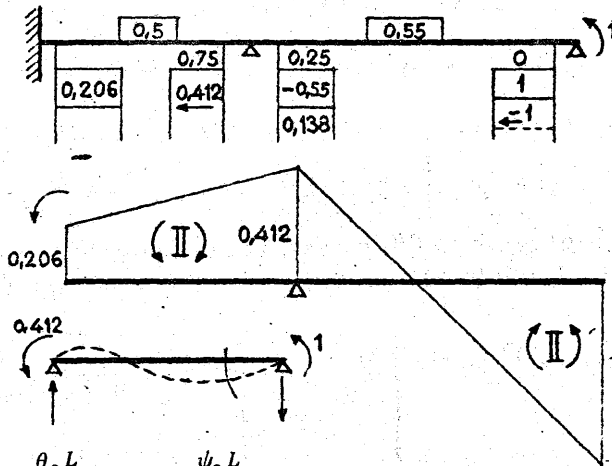
$$C_1 = \frac{\psi_1}{2 \theta_1} = \frac{1,012}{2,012} = 0,5$$

$$C_2 = \frac{\psi_2}{2 \theta_2} = \frac{1,236}{2,242} = 0,55$$

$$\frac{3 \theta_1}{4 \theta_1^2 - \psi_1^2} = \frac{3 \times 1,006}{4 - 1,012^2} = \frac{3,018}{2,97} = 1,01 ; r_1 = \frac{16 \times 1,01}{16 \times 1,01 + 6 \cdot 0,89} = \frac{16,2}{21,59} = 0,75$$

$$\frac{1}{\theta_2} = \frac{1}{1,1212} = 0,899$$

$$r_2 = 0,25$$



$$\phi_A = 1 \cdot \frac{\theta_2 L}{3 E I} - 0,412 \frac{\psi_2 L}{6 E I}$$

$$\phi_A = \frac{L}{3 E I} (1,1212 - 0,206 \cdot 1,236) = \frac{L}{3 E I} \cdot 0,866$$

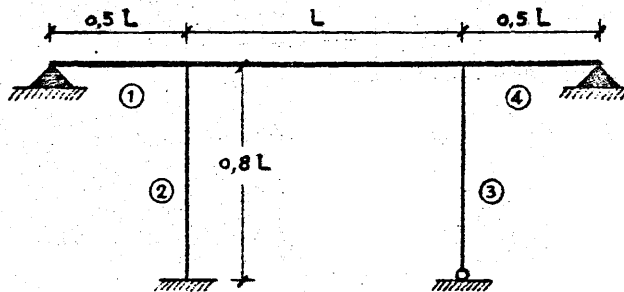
$$K'_A = K'_B = \frac{4 E_o L_o}{L_o} \phi_A = 4 \frac{E I}{L_o} \cdot \frac{L_2}{3 E I} 0,866 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} 0,866$$

$$K'_A = K'_B = 0,58 ; \lambda_o L_o = 4,02$$

que se acepta

$$p = 4,02^2 \sqrt{\frac{E_o I_o}{m_o L_o^4}}$$

# Problema 6



La rigidez es constante a lo largo de toda la estructura.

Si tomamos como referencia el vano central y numeramos 1 ; ... ; 4 el resto de las piezas tendremos

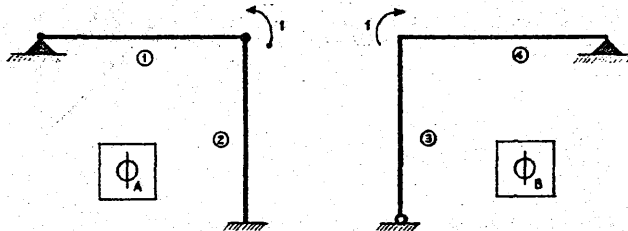
$$A_1 = A_4 = 0,5 \quad ; \quad A_2 = A_3 = 0,8$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = l = h_1 = h_2 = h_3 = h_4$$

$$K_1 = K_4 = 0,5 \quad \left| \quad \lambda_1 L_1 = \lambda_4 L_4 = 0,5 \lambda_o L_o$$

$$K_2 = K_3 = 0,8 \quad \left| \quad \lambda_2 L_2 = \lambda_3 L_3 = 0,8 \lambda_o L_o$$

Si aislamos la barra central los ángulos en los extremos se obtienen del reparto en los nudos siguientes



DETERMINACION DE  $\phi_A$

Rigideces de tramos

$$K_1 = \frac{3EI}{L_1} \frac{1}{\theta_1} = \frac{EI}{L_o} \frac{6}{\theta_1}$$



$$K_2 = \frac{4EI}{L_2} \left( \frac{3\theta_2}{4\theta_2^2 - \psi_2^2} \right) = \frac{EI}{L_o} \frac{15\theta_2}{4\theta_2^2 - \psi_2^2}$$

### Factores de distribución

$$r_1 = \frac{\frac{6}{\theta_1}}{\frac{6}{\theta_1} + \frac{15\theta_2}{4\theta_2^2 - \psi_2^2}}$$

$$r_2 = \frac{\frac{15\theta_2}{4\theta_2^2 - \psi_2^2}}{\frac{6}{\theta_1} + \frac{15\theta_2}{4\theta_2^2 - \psi_2^2}}$$

Factor de transmisión  $C_2 = \frac{\psi_2}{2\theta_2}$

Supongamos

$$\frac{\lambda_o L_o}{\theta_o} = 3,8$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 L_1 = 1,9 \\ \lambda_2 L_2 = 3,04 \end{array} \right.$$

$$\theta_1 = \theta(1,9) = 1,095$$

$$\theta_2 = \theta(3,04) = 5,335$$

$$\psi_2 = \psi(3,04) = 9,635$$

$$\frac{6}{\theta_1} = \frac{6}{1,095} = 5,5$$

$$\frac{15\theta_2}{4\theta_2^2 - \psi_2^2} = \frac{15 \times 5,335}{114 - 93,5} = 3,9$$

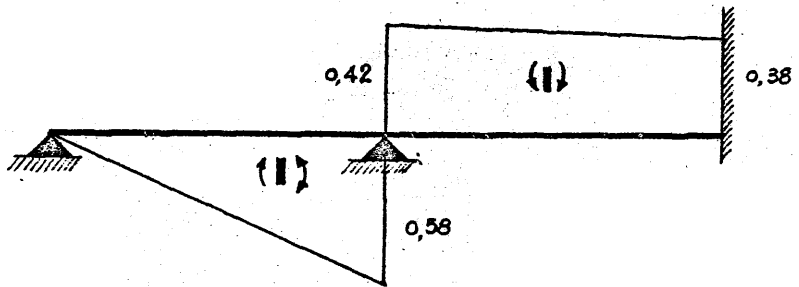
$$r_1 = \frac{5,5}{9,4} = 0,58$$

$$r_2 = \frac{3,9}{9,4} = 0,42$$

$$C_2 = \frac{9,635}{10,67} = 0,9$$

La distribución es inmediata.

La barra 1 toma  $M_1 = 0,58$  y la 2  $0,42$  transmitiendo al extremo empotrado  $0,9 \times 0,42 = 0,38$



El giro de la barra 1 es

$$\phi_1 = 0,58 \frac{\theta_1 L_1}{3 EI}$$

y el de la barra 2 es

$$\phi_2 = 0,42 \frac{\theta_2 L_2}{3 EI} - 0,38 \frac{\psi_2 L_2}{6 EI}$$

$$\phi_1 = \frac{0,58 \times 1,095 \times 0,5}{3} \frac{L_o}{EI} = 0,105 \frac{L_o}{EI}$$

$$\phi_2 = \left( \frac{0,42 \times 5,335 \times 0,8}{3} - \frac{0,38 \times 9,635 \times 0,8}{6} \right) \frac{L_o}{EI} = 0,11 \frac{L_o}{EI}$$

Evidentemente deberá ser  $\phi_1 = \phi_2$  y esto nos da una idea de la precisión de nuestros cálculos.

Tomaremos

$$\phi_A = 0,11 \frac{L_o}{EI}$$

DETERMINACION DE  $\phi_B$

Rigideces de tramos

$$\left\{ \begin{array}{l} K_4 = \frac{EI}{L_o} \frac{6}{\theta_4} \\ K_3 = \frac{EI}{L_o} \frac{3,75}{\theta_3} \end{array} \right.$$

### Factores de distribución

$$\begin{array}{l}
 r_3 = \frac{\frac{3,75}{\theta_3}}{\frac{3,75}{\theta_3} + \frac{6}{\theta_4}} \\
 r_4 = \frac{\frac{6}{\theta_4}}{\frac{3,75}{\theta_3} + \frac{6}{\theta_4}}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 \theta_3 = \theta(3,04) = 5,335 \\
 \theta_4 = 1,095 \\
 r_3 = \frac{0,7}{1,25} = 0,56 \\
 r_4 = \frac{0,55}{1,25} = 0,44
 \end{array}
 \right.
 \left.
 \begin{array}{l}
 \frac{3,75}{\theta_3} = 0,7 \\
 6/\theta_4 = 0,55
 \end{array}
 \right.$$

La distribución de momentos es

$$M_4 = 0,44$$

$$M_3 = 0,56$$

El giro  $\phi_B$  será

$$\phi_B = \phi_4 = 0,44 \cdot \frac{1,095 \times 0,5}{3} \cdot \frac{L_o}{EI}$$

$$\boxed{\phi_B = 0,08 \frac{L_o}{EI}}$$

$$\left\{
 \begin{array}{l}
 K_A = 4 \frac{EI}{L_o} \phi_A = 4 \times 0,11 = 0,44 \\
 K_B = 4 \times 0,08 = 0,32
 \end{array}
 \right.$$

Buscando en las tablas se obtiene  $\lambda L = 4,18$

El segundo tanteo lo haremos, pues, con el valor

$$\lambda_o L_o = 4,18 \left\{
 \begin{array}{l}
 \lambda_1 L_1 = 2,09 = \lambda_4 L_4 \\
 \lambda_2 L_2 = 3,344 = \lambda_3 L_3
 \end{array}
 \right.$$

$$\theta_1 = \theta_4 = \theta(2,09) = 1,149$$

$$\theta_2 = \theta_3 = \theta(3,344) = -1,78$$

$$\psi_2 = \psi(3,344) = -4,62$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{6}{\theta_1} = 5,21 \\ \frac{15 \theta_2}{4 \theta_2^2 - \psi_2^2} = \frac{-26,6}{12,6 - 21,5} = \frac{26,6}{8,9} = 3 \end{array} \right\}$$

$$r_1 = \frac{5,21}{8,21} = 0,635$$

$$M_1 = 0,635$$

$$M_2 = 0,365$$

$$\phi_A = \frac{0,635 \times 1,149 \times 0,5}{3} \frac{L_o}{EI} = 0,12 \frac{L_o}{EI}$$

$$r_3 = \frac{\frac{3,75}{-1,78}}{-\frac{3,75}{1,78} + \frac{6}{1,149}} = \frac{-2,1}{-2,1 + 5,25} = \frac{2,1}{3,15} = -0,669$$

$$M_3 = -0,669$$

$$r_4 = \frac{5,25}{3,15} = 1,669 \quad ; \quad M_4 = 1,669$$

$$\phi_B = \frac{1,669 \times 1,149 \times 0,5}{3} \frac{L_o}{EI} = 0,32 \frac{L_o}{EI}$$

$$\left. \begin{aligned} K'_A &= 4 \times 0,12 = 0,48 \\ K'_B &= 4 \times 0,32 = 1,28 \end{aligned} \right\} \lambda L = 3,9$$

Para comprender la posibilidad de que  $r_3$  sea negativo basta observar que  $\lambda_2 L_2$  presenta un valor  $\pi$  alrededor del cual estamos operando. En el caso límite de  $\lambda_2 L_2 = \pi$  los pilares dejan de tener rigidez y se comportan como simples apoyos de viga continua. En este caso  $\lambda L = 3,91$  y

$$\phi_A = \phi_B = 0,192 \frac{L_o}{EI}$$

$$K'_A = K'_B = 0,768 \rightarrow \lambda_o L_o = 3,90$$

Tomaremos, pues, como valor definitivo  $\lambda_o L_o = 3,90$  y por tanto la frecuencia fundamental es

$$p = 15,3 \sqrt{\frac{EI}{m L_o^4}}$$

#### Problema 7

Supongamos una viga con carga  $w$  uniforme.  
La ecuación es

$$\ddot{q}_r + p_r^2 q_r = \frac{N_r}{M_r}$$

$$M_r = \int_0^L m \dot{Y}_r^2(x) dx; \quad N_r \equiv \int_0^L W(x; t) Y_r(x) dx$$

Si

$$Y = \sin \pi \frac{x}{L}$$

$$M_r = \int_0^L m \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{mL}{2}$$

$$N_r = \int_0^L W \sin \pi \frac{x}{L} dx = \frac{2L}{\pi} W$$

$$\ddot{q} + p^2 q = \frac{4W}{\pi m}$$

Ecuación lineal de coeficientes constantes cuya solución es

$$q = \frac{4W}{Hmp^2} (1 - \cos pt)$$

y por tanto

$$y = \frac{4W}{\pi mp^2} (1 - \cos pt) \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$$

La frecuencia es

$$p^2 = \frac{\int EI Y''^2(x) dx}{M} = \frac{2}{ml} \int_0^L EI \cdot \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx$$

$$p^2 = \frac{EI}{m} \frac{\pi^4}{L^4}$$

La flecha máxima se produce cuando

$$\cos pt = -1 \quad \text{''} \quad pt = \pi \rightarrow t = \frac{\pi}{p}$$

Como

$$T = \frac{2\pi}{P} \quad t = \frac{T}{2}$$

y entonces

$$y_{max} = 2 y_{estática}$$

Como

$$T = \frac{2L^2}{\pi} \sqrt{\frac{W}{EIg}}$$

Si en lugar de  $W$  actúa la carga  $W+W'$

$$T_{W+W'} = T_W \sqrt{\frac{W+W'}{W}}$$

### Problema 8

Carga aislada móvil a velocidad uniforme sobre viga simplemente apoyada

$$N_r = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{vt-\epsilon/2}^{vt+\epsilon/2} P \sin \frac{\pi x}{L} dx = P \sin \pi \frac{vt}{L}$$

$$\ddot{q} + p^2 q = \frac{2}{mL} P \sin \pi \frac{vt}{L}$$

La integral es

$$q = \frac{\frac{2P}{mL}}{p^2 \left( \frac{\pi V}{L} \right)^2} \left( \sin \frac{\pi V}{L} t - \frac{\pi V}{L p} \sin pt \right)$$

Si llamamos

$$T_1 = \frac{2L}{V} \quad p_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$q = \frac{2P}{mL(p^2 - p_1^2)} \left( \sin 2\pi \frac{t}{T_1} - \frac{T}{T_1} \sin 2\pi \frac{t}{T} \right)$$

El primer sumando representa las vibraciones forzadas inducidas por la carga y el segundo la vibración natural.

Como

$$y = q \times \sin \frac{\pi x}{L}$$

Si  $x=L/2$  y  $V=0$  tendríamos la flecha estática.

La resonancia se produce para  $T=T_1$  en cuyo caso se produce la indeterminación  $0/0$  y es preciso recurrir a la regla de L'Hôpital.

En los puentes  $T_1 \gg T$  y el efecto es muy reducido.